

《高等数学》试题库

《高等数学(一)》最新模拟试题及答案

一、单项选择题(本大题共5小题,每小题2分,共10分)

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的,请将其代码填写

在题后的括号内。错选、多选或未选均无分。

1. 设 $f(x) = \ln x$, 且函数 $\varphi(x)$ 的反函数 $\varphi^{-1}(x) = \frac{2(x+1)}{x-1}$, 则 $f[\varphi(x)] =$ ()

A. $\ln \frac{x-2}{x+2}$

B. $\ln \frac{x+2}{x-2}$

C. $\ln \frac{2-x}{x+2}$

D. $\ln \frac{x+2}{2-x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^0 (e^t + e^{-t} - 2) dt}{1 - \cos x} =$ ()

A. 0

B. 1

C. -1

D. ∞

3. 设 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 且函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 则必有 ()

A. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$

B. $\Delta y = 0$

C. $dy = 0$

D. $\Delta y = dy$

4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 1 \\ 3x-1, & x > 1 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处 ()

A. 不连续

B. 连续但左、右导数不存在

C. 连续但不可导

D. 可导

5. 设 $\int x f(x) dx = e^{-x^2} + C$, 则 $f(x) =$ ()

A. $x e^{-x^2}$

B. $-x e^{-x^2}$

C. $2e^{-x^2}$

D. $-2e^{-x^2}$

二、填空题(本大题共10小题,每空3分,共30分)

请在每小题的空格中填上正确答案。错填、不填均无分。

6. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上有定义, 则函数 $f(x + \frac{1}{4}) + f(x - \frac{1}{4})$ 的定义域是_____.

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n) (|q| < 1) =$ _____

8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$

9. 已知某产品产量为 g 时, 总成本是 $C(g) = 9 + \frac{g^2}{800}$, 则生产 100 件产品时的边际

成本 $MC|_{g=100} = \underline{\hspace{2cm}}$

10. 函数 $f(x) = x^3 + 2x$ 在区间 $[0, 1]$ 上满足拉格朗日中值定理的点 ξ 是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

11. 函数 $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9$ 的单调减少区间是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

12. 微分方程 $xy' - y = 1 + x^3$ 的通解是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

13. 设 $\int_a^{2\ln 2} \frac{dt}{\sqrt{e^t - 1}} = \frac{\pi}{6}$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 设 $z = \frac{\cos^2 x}{y}$ 则 $dz = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. 设 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 则 $\iint_D x e^{-2y} dx dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、计算题 (一) (本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分)

16. 设 $y = \left(\frac{1}{x}\right)^x$, 求 dy .

17. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \cot x}{\ln x}$

18. 求不定积分 $\int \frac{1}{(5x+1)\sqrt{\ln(5x+1)}} dx$.

19. 计算定积分 $I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

20. 设方程 $x^2 y - 2xz + e^z = 1$ 确定隐函数 $z = z(x, y)$, 求 z'_x, z'_y .

四、计算题 (二) (本大题共 3 小题, 每小题 7 分, 共 21 分)

21. 要做一个容积为 v 的圆柱形容器, 问此圆柱形的底面半径 r 和高 h 分别为多少时, 所用材料最省?

22. 计算定积分 $\int_0^{\pi} x \sin^2 x dx$

23. 将二次积分 $I = \int_0^{\pi} dx \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{\pi}} \frac{\sin y^2}{y} dy$ 化为先对 x 积分的二次积分并计算其值。

五、应用题（本题 9 分）

24. 已知曲线 $y = x^2$ ，求

(1) 曲线上当 $x=1$ 时的切线方程；

(2) 求曲线 $y = x^2$ 与此切线及 x 轴所围成的平面图形的面积，以及其绕 x 轴旋转而成的

旋转体的体积 V_x 。

六、证明题（本题 5 分）

25. 证明：当 $x > 0$ 时， $x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2} - 1$

高等数学（一）模拟试题参考答案

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

1. 答案: **B**

2. 答案: A

3. 答案: **A**

4. 答案: **C**

5. 答案: **D**

二、填空题 (本大题共 10 小题, 每空 3 分, 共 30 分)

6. 答案: $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$

7. 答案: $\frac{a}{1-q}$

8. 答案: 0

9. 答案: $\frac{1}{4}$

10. 答案: $\frac{1}{\sqrt{3}}$

11. 答案: (1, 2)

12. 答案: $\frac{x^3}{2} - 1 + Cx$

13. 答案: $a = \ln 2$

14. 答案: $-\frac{1}{y} \left(\sin 2x dx + \frac{\cos^2 x}{y} dy \right)$

15. 答案: $\frac{1}{4}(1 - e^{-2})$

三、计算题（一）（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

16. 答案： $-(\ln x + 1) \left(\frac{1}{x} \right)^x dx$

17. 答案： -1

18. 答案： $\frac{2}{5} \sqrt{\ln(5x+1)} + C$

19. 答案： $\frac{\pi}{4} a^2$

20. 答案： $Z'_x = \frac{2xy - 2z}{2x - e^z}, Z'_y = \frac{x^2}{2x - e^z}$

四、计算题（二）（本大题共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分）

21. 答案： $r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, h_0 = \frac{V}{\pi r_0^2} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$

22. 答案： $\frac{\pi^2}{4}$

23. 答案： 1

五、应用题（本题 9 分）

24. 答案： (1) $y=2x-1$ (2) $\frac{1}{12}, \frac{\pi}{30}$

(2) 所求面积 $S = \int_0^1 \left(\frac{y+1}{2} - \sqrt{y} \right) dy = \left[\frac{1}{4}(y+1)^2 - \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{12}$

所求体积 $V_x = \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{30}$

六、证明题（本题 5 分）

25 . 证明 :

$$\begin{aligned}\because f(x) &= x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + 1 \\ \therefore f'(x) &= \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + x \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \\ \because x &> 0 \\ \therefore x + \sqrt{1+x^2} &> 1 \\ \therefore f'(x) &= \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > 0\end{aligned}$$

故当 $x > 0$ 时 $f(x)$ 单调递增, 则 $f(x) > f(0)$, 即

$$x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2} - 1$$

高等数学（上）试题及答案

一、填空题（每小题3分，本题共15分）

1、 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2}{x}} = \underline{\quad\quad\quad}$ 。

2、当 k 时， $f(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ x^2 + k & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续。

3、设 $y = x + \ln x$ ，则 $\frac{dx}{dy} = \underline{\quad\quad\quad}$

4、曲线 $y = e^x - x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程是

5、若 $\int f(x)dx = \sin 2x + C$ ， C 为常数，则 $f(x) = \underline{\quad\quad\quad}$ 。

二、单项选择题（每小题3分，本题共15分）

1、若函数 $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ，则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = (\quad)$

A、0 B、-1 C、1 D、不存在

2、下列变量中，是无穷小量的为 ()

A. $\ln \frac{1}{x} (x \rightarrow 0^+)$ B. $\ln x (x \rightarrow 1)$ C. $\cos x (x \rightarrow 0)$ D. $\frac{x-2}{x^2-4} (x \rightarrow 2)$

3、满足方程 $f'(x) = 0$ 的 x 是函数 $y = f(x)$ 的 ()。

A . 极大值点 B . 极小值点 C . 驻点 D . 间断点

4、下列无穷积分收敛的是 ()

A、 $\int_0^{+\infty} \sin x dx$ B、 $\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx$ C、 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ D、 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

5、设空间三点的坐标分别为 $M(1, 1, 1)$ 、 $A(2, 2, 1)$ 、 $B(2, 1, 2)$ 。则 $\angle AMB =$ ____

A、 $\frac{\pi}{3}$ B、 $\frac{\pi}{4}$ C、 $\frac{\pi}{2}$ D、 π

三、 计算题 (每小题 7 分, 本题共 56 分)

1、求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{\sin 2x}$ 。

2、求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$

3、求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\cos x} e^{-t^2} dt}{x^2}$

4、设 $y = e^5 + \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, 求 y'

5、设 $f = y(x)$ 由已知 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$

6、求不定积分 $\int \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{2}{x} + 3\right) dx$

7、求不定积分 $\int e^x \cos x dx$

8、设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^x} & x < 0 \\ \frac{1}{1+x} & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $\int_0^2 f(x-1) dx$

四、 应用题 (本题 7 分)

求曲线 $y = x^2$ 与 $x = y^2$ 所围成图形的面积 A 以及 A 绕 y 轴旋转所产生的旋转体的体积。

五、证明题 (本题 7 分)

若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0) = f(1) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = 1$, 证明:

在 $(0,1)$ 内至少有一点 ξ , 使 $f'(\xi) = 1$ 。

参考答案

一. 填空题 (每小题 3 分, 本题共 15 分)

1、 e^6 2、 $k=1$ 3、 $\frac{x}{1+x}$ 4、 $y=1$ 5、 $f(x) = 2\cos 2x$

二. 单项选择题 (每小题 3 分, 本题共 15 分)

1、D 2、B 3、C 4、B 5、A

三. 计算题 (本题共 56 分, 每小题 7 分)

1. 解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 2x(\sqrt{4+x}+2)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 2x(\sqrt{4+x}+2)} = \frac{1}{8}$ 7 分

2. 解: $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \frac{1}{2}$ 7 分

3. 解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_1^{\cos x} e^{-t^2} dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x e^{-\cos^2 x}}{2x} = -\frac{1}{2e}$ 7 分

4、解：

$$y' = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) \dots\dots\dots$$

.....4 分

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \dots\dots\dots \text{.....7 分}$$

5、解： $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1}{2t}$ (4 分)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{-\frac{1}{2t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = -\frac{1+t^2}{4t^3} \quad (7 \text{ 分})$$

6、解： $\int \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{2}{x} + 3\right) dx = -\frac{1}{2} \int \sin\left(\frac{2}{x} + 3\right) d\left(\frac{2}{x} + 3\right) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2}{x} + 3\right) + C$ (7 分)

7、解： $\int e^x \cos x dx = \int \cos x de^x$

$$= e^x \cos x + \int e^x \sin x dx \dots\dots\dots \text{.....2 分}$$

$$= e^x \cos x + \int \sin x de^x \dots\dots\dots \text{.....3 分}$$

$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \dots\dots\dots \text{.....5 分}$$

$$= e^x (\sin x + \cos x) + C \dots\dots\dots \text{...7 分}$$

8、解： $\int_0^2 f(x-1)dx = \int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx \cdots$...2分

$$= \int_{-1}^0 \frac{dx}{1+e^x} + \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \cdots \cdots \cdots 3 \text{分}$$

$$= \int_{-1}^0 (1 - \frac{e^x}{1+e^x})dx + \ln(1+x)|_0^1 \cdots \cdots \cdots 5 \text{分}$$

$$= 1 - \ln(1+e^x)|_{-1}^0 + \ln 2 \cdots \cdots \cdots 6 \text{分}$$

$$= 1 + \ln(1+e^{-1}) = \ln(1+e) \cdots \cdots \cdots 7 \text{分}$$

四．应用题（本题 7 分）

解：曲线 $y = x^2$ 与 $x = y^2$ 的交点为 $(1, 1)$, 1分

于是曲线 $y = x^2$ 与 $x = y^2$ 所围成图形的面积 A 为

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = [\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^2]_0^1 = \frac{1}{3} \quad 4 \text{分}$$

A 绕 y 轴旋转所产生的旋转体的体积为：

$$V = \pi \int_0^1 ((\sqrt{y})^2 - y^4)dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{5} \right]_0^1 = \frac{3}{10}\pi \quad 7 \text{分}$$

五、证明题（本题 7 分）

证明：设 $F(x) = f(x) - x$, ...2分

显然 $F(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上连续，在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内可导，

且 $F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} > 0$, $F(1) = -1 < 0$.

由零点定理知存在 $x_1 \in [\frac{1}{2}, 1]$, 使 $F(x_1) = 0$ 4 分

由 $F(0) = 0$, 在 $[0, x_1]$ 上应用罗尔定理知 , 至少存在一点

$\xi \in (0, x_1) \subset (0, 1)$, 使 $F'(\xi) = f'(\xi) - 1 = 0$, 即 $f'(\xi) = 1$... 7 分

高等数学试题

一、单项选择题(每小题 1 分，共 30 分)

1、函数 $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ 的定义域是

A、 $[-1, 1]$ B、 $(-2, 2)$

C、 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

D、 $(-\infty, +\infty)$

2、下列函数中既是有界函数又是偶函数的是

A、 $\arcsin x$ B、 $\arctg x$

C、 $x^2 + 1$ D、 $\sin x + \cos x$

3、函数 $y=e^x - 1$ 的反函数是

A、 $y=\ln x + 1$ B、 $y=\ln(x - 1)$

C、 $y=\ln x - 1$ D、 $y=\ln(x + 1)$

4、 $x \sin =$

A、 ∞ B、0 C、1 D、不存在

5、某商品的需要量 Q 是价格 P 的函数 $Q=a - bP(a>0, b>0)$ ，则需求量 Q 对价格 P 的弹性是

A、 b B、

C、 D、

6、曲线在 $t=0$ 处的切线方程是

A、

B、

C、 $y - 1=2(x - 2)$

D、 $y - 1= - 2(x - 2)$

7、函数 $y=|\sin x|$ 在 $x=0$ 处是

A、无定义 B、有定义，但不连续

C、连续，但不可导 D、连续且可导

8、设 $y=\ln x$ ，则 $y'' =$

A、 B、

C、 D、

9、设 $f(x)=\arctan x$ ，则 $df(x)=$

A、 B、

C、 D、

10、 $=$

A、 -1 B、 0 C、 1 D、 ∞

11、函数 $y=ax^2+c$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调增加，则 a, c 应满足

A、 $a<0, c=0$ B、 $a>0, c$ 任意

C、 $a<0, c\neq 0$ D、 $a<0, c$ 任意

12、若 $\ln|x|$ 是函数 $f(x)$ 的原函数， $a\neq 0$ ，那么下列函数中， $f(x)$ 的原函数是

A、 $\ln|ax|$ B、

C、 $\ln|x+a|$ D、

13、设 $a\neq 0$ ，则 $\int (ax+b)^{100} dx =$

A、

B、

C、

D、 $100a(ax+b)^{99}$

14、 $\int x \sin x dx =$

A、 $x \cos x - \sin x + c$

B、 $x \cos x + \sin x + c$

C、 $-x \cos x + \sin x + c$

D、 $-x \cos x - \sin x + c$

15、函数 $f(x)=x^2$ 在 $[0, 2]$ 区间上的平均值是

A、 $\frac{1}{3}$ B、1 C、2 D、 $\frac{4}{3}$

16、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} =$

A、 $+\infty$ B、0 C、 $-\infty$ D、1

17、下列广义积分中收敛的是

A、 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ B、 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$

C、 D、

18、方程 $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y = 1$ 表示的空间图形为

A、平面 B、直线

C、柱面 D、球面

19、函数 $z = \arcsin(x^2 + y^2)$ 的定义域为

A、 $x^2 + y^2 < 1$ B、 $x^2 + y^2 \leq 1$

C、 $x^2 + y^2 \geq 1$

D、 $|x| \leq 1, |y| \leq 1$

20、极限=

A、1 B、2 C、0 D、 ∞

21、函数 $f(x, y) =$

在 origin

A、连续 B、间断

C、取极小值 D、取极大值

22、已知 $f(x, y)$ 的两个偏导数存在，且 $f'_x(x, y) > 0$ ， $f'_y(x, y) < 0$ ，则

A、当 y 不变时， $f(x, y)$ 随 x 的增加而增加

B、当 y 不变时， $f(x, y)$ 随 x 的增加而减少

C、当 x 不变时， $f(x, y)$ 随 y 的增加而增加

D、上述论断均不正确

23、设 $z = e^x \sin y$ ，则 $dz =$

A、 $e^x(\sin y dx + \cos y dy)$ B、 $e^x \sin y dx$

C、 $e^x \cos y dy$ D、 $e^x \cos y (dx + dy)$

24、已知几何级数收敛，则

A、 $|q| \leq 1$ ，其和为

B、 $|q| < 1$ ，其和为

C、 $|q| < 1$ ，其和为

D、 $|q| < 1$ ，其和为 aq

25、是级数收敛的

A、必要条件 B、充分条件

C、充分必要条件 D、无关条件

26、下列级数中绝对收敛的是

A、 B、

C、 D、

27、幂级数的收敛半径为

A、1 B、 C、2 D、0

28、微分方程 $y^3 + (y')^6 + xy^3 + x^4y^2 = 1$ 的阶数是

A、1 B、2 C、3 D、6

29、微分方程的通解为

A、 $y = \pm 1$ B、 $y = \sin x + c$

C、 $y = \cos(x + c)$ D、 $y = \sin(x + c)$

30、微分方程满足初始条件 $y(0)=0$ 的特解为

A、 $y = \cos x - 1$ B、 $y = \cos x$

C、 $y = \sin x$ D、 $y = -\cos x + 1$

二、填空题(每空 2 分，共 20 分)

1、 a, b 为常数，要使

，则 $b =$ (1) 。

2、设由 $y = \sin(x + y)$ 确定隐函数 $y = y(x)$ ，则 $dy =$ (2) 。

3、设当 $x \rightarrow 0$ 时与 ax 是等价无穷小，则常数 $a =$ (3) 。

4、 $=$ (4) 。

5、 $=$ (5) 。

6、设 $f(x, y) =$ ，则 $f'_x(1, 2) =$ (6) 。

7、交换积分顺序

$=$ (7) 。

8、函数 e^{-2x} 的麦克劳林级数中 x^n 的系数为 (8) 。

9、微分方程 $y'' - 2y' + 5y = 0$ 的通解为 (9) 。

10、函数 $y=\ln x$ 在区间 $[1,e]$ 上满足拉格朗日中值定理条件的 $\xi=$ (10) 。

三、解答题(每小题 5 分，共 30 分)

1、求.

2、设 $y=\cos 2e^{-3x}$, 求 y' .

3、求 $\int x^2 e^{-x} dx$.

4、求到两点 $A(1, 0, -1)$, $B(3, -2, 1)$ 距离相等的点的轨迹，并指出该轨迹的名称.

5、判断下列级数的敛散性：

(1) ; (2).

6、求微分方程满足初始条件 $y(0)=0$ 的特解.

四、(本题 8 分)

设平面图形由曲线 $xy=1$ 与直线 $y=2$, $x=3$ 围成，求

(1)平面图形的面积 S

(2)此平面图形绕 X 轴旋转所成的旋转体体积 V

五、(本题 8 分)

某工厂生产甲、乙两种产品,单位售价分别为 40 元和 60 元,若生产 X 单位甲产品,生产 y 单位乙产品的总费用为 $20x + 30y + 0.1(2x^2 - 2xy + 3y^2) + 100$,试求出甲、乙两种各生产多少时取得最大利润。

六、(本题 4 分)

求证方程 $x - \sin x - 1 = 0$ 在区间 $[-\pi, 2]$ 内有唯一零点。

参考答案

一、选择题(本题共 30 分)

1.B 2.A 3.D 4.C 5.C

6.A 7.C 8.D 9.B 10.A

11.B 12.A 13.C 14.C 15.A

16.D 17.C 18.D 19.B 20.B

21.B 22.A 23.A 24.C 25.A

26.D 27.B 28.C 29.D 30.D

二、填空题(每小题 2 分 , 共 20 分)

1、 1

2、

3、

4、 $e^4 - 1$

5、 $\arctg x + \ln(1 + x^2) + c$

6、

7、

8、

9、 $e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$

10、 $e - 1$

三、(每小题 5 分，共 20 分)

1、解 原式=

(3 分)

$=1$ (2 分)

2、解 $y' = 2\cos e^{-3x} \cdot (e^{-3x})'$

(2 分)

$= 2\cos e^{-3x} \cdot (-\sin e^{-3x}) \cdot (e^{-3x})'$

(2 分)

$$= 3\sin(2e^{-3x}) \cdot e^{-3x} \text{ (1 分)}$$

3、解 原式 = $-\int x^2 de^{-x}$

$$= -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx \text{ (2 分)}$$

$$= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + 2 \int e^{-x} dx$$

$$= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + c \text{ (2 分)}$$

$$= -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + c \text{ (1 分)}$$

4、解 设点 (x, y, z) 到 A, B 距离相等, 则

(2 分)

两边平方 并化简得

$$2x - 2y + 2z - 6 = 0 \text{ (2 分)}$$

该轨迹称为平面(1 分)

5、解：(1)∵

而等比级数收敛，

∴原级数收敛(3 分)

(2)∵ $1 \neq 0$ ，

∴原级数发散。(2 分)

6、解 原方程可化为，

即(1 分)

积分得(2 分)

以 $x=0, y=0$ 代入上式，

求得 $c=0$ 。(1 分)

∴所求特解为 $y = -1$ (1 分)

(注：也可用一阶线性方程求解)

四、(本题 8 分)

解：(1) $S =$ (3 分)

$= 5 - \ln 6$ (1 分)

(2) $V =$ (3 分)

$=$ (1 分)

五、(本题 8 分)

解：总收入为 $40x + 60y$ ，总利润为

$z = 40x + 60y - (20x + 30y + 0.1(2x^2 - 2xy + 3y^2) + 100) = 20x + 30y - 0.2x^2 + 0.2xy - 0.3y^2 -$

100 (2 分)

令(2分)

解得 $x=90, y=80$ (2分)

而 $= -0.4, = 0.2,$

$= -0.6$

$\Delta = 0.22 - (-0.4) \cdot (-0.6) < 0$, 而 $= -0.4 < 0$

$\therefore x=90, y=80$ 为极大值点

因极值点唯一，故它就是最大值点。(2分)

答：当甲产品生产 90 单位，乙产品生产 80 单位时利润最大。

六、(本题 4 分)

证：设 $f(x) = x - \sin x - 1$,

在 $0 \leq x \leq 2$ 上连续，

$$\therefore f(0) = -2 < 0,$$

$$f(2) = 1 - \sin 2 > 0,$$

$\therefore f(x)$ 在 $[0, 2]$ 内有零点。(2 分)

$$\text{又 } f'(x) = 1 - \cos x > 0 \quad (0 < x < 2)$$

$\therefore f(x)$ 严格单调上升, $\therefore f(x)$ 只有唯一的零点。(2 分)

高等数学试题

一、单项选择题(每小题 1 分，共 30 分)

1、函数 $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ 的定义域是

A、 $[-1, 1]$ B、 $(-2, 2)$

C、 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

D、 $(-\infty, +\infty)$

2、下列函数中既是有界函数又是偶函数的是

A、 $\arcsin x$ B、 $\arctg x$

C、 $x^2 + 1$ D、 $\sin x + \cos x$

3、函数 $y=e^x - 1$ 的反函数是

A、 $y=\ln x + 1$ B、 $y=\ln(x - 1)$

C、 $y=\ln x - 1$ D、 $y=\ln(x + 1)$

4、 $x \sin =$

A、 ∞ B、0 C、1 D、不存在

5、某商品的需要量 Q 是价格 P 的函数 $Q=a - bP(a>0, b>0)$ ，则需求量 Q 对价格 P 的弹性是

A、 b B、

C、 D、

6、曲线在 $t=0$ 处的切线方程是

A、

B、

C、 $y - 1=2(x - 2)$

D、 $y - 1= - 2(x - 2)$

7、函数 $y=|\sin x|$ 在 $x=0$ 处是

A、无定义 B、有定义，但不连续

C、连续，但不可导 D、连续且可导

8、设 $y=\ln x$ ，则 $y'' =$

A、 B、

C、 D、

9、设 $f(x)=\arctan x$ ，则 $df(x)=$

A、 B、

C、 D、

10、 $=$

A、 -1 B、 0 C、 1 D、 ∞

11、函数 $y=ax^2+c$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调增加, 则 a, c 应满足

A、 $a<0, c=0$ B、 $a>0, c$ 任意

C、 $a<0, c\neq 0$ D、 $a<0, c$ 任意

12、若 $\ln|x|$ 是函数 $f(x)$ 的原函数, $a\neq 0$, 那么下列函数中, $f(x)$ 的原函数是

A、 $\ln|ax|$ B、

C、 $\ln|x+a|$ D、

13、设 $a\neq 0$, 则 $\int (ax+b)^{100} dx =$

A、

B、

C、

D、 $100a(ax+b)^{99}$

14、 $\int x \sin x dx =$

A、 $x \cos x - \sin x + c$

B、 $x \cos x + \sin x + c$

C、 $-x \cos x + \sin x + c$

D、 $-x \cos x - \sin x + c$

15、函数 $f(x)=x^2$ 在 $[0, 2]$ 区间上的平均值是

A、 $\frac{1}{2}$ B、1 C、2 D、 $\frac{3}{2}$

16、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} =$

A、 $+\infty$ B、0 C、 $-\infty$ D、1

17、下列广义积分中收敛的是

A、 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ B、 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$

C、 D、

18、方程 $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y = 1$ 表示的空间图形为

A、平面 B、直线

C、柱面 D、球面

19、函数 $z = \arcsin(x^2 + y^2)$ 的定义域为

A、 $x^2 + y^2 < 1$ B、 $x^2 + y^2 \leq 1$

C、 $x^2 + y^2 \geq 1$

D、 $|x| \leq 1, |y| \leq 1$

20、极限=

A、1 B、2 C、0 D、 ∞

21、函数 $f(x, y) =$

在 origin

A、连续 B、间断

C、取极小值 D、取极大值

22、已知 $f(x, y)$ 的两个偏导数存在，且 $f'_x(x, y) > 0$ ， $f'_y(x, y) < 0$ ，则

A、当 y 不变时， $f(x, y)$ 随 x 的增加而增加

B、当 y 不变时， $f(x, y)$ 随 x 的增加而减少

C、当 x 不变时， $f(x, y)$ 随 y 的增加而增加

D、上述论断均不正确

23、设 $z = e^x \sin y$ ，则 $dz =$

A、 $e^x(\sin y dx + \cos y dy)$ B、 $e^x \sin y dx$

C、 $e^x \cos y dy$ D、 $e^x \cos y (dx + dy)$

24、已知几何级数收敛，则

A、 $|q| \leq 1$ ，其和为

B、 $|q| < 1$ ，其和为

C、 $|q| < 1$ ，其和为

D、 $|q| < 1$ ，其和为 aq

25、是级数收敛的

A、必要条件 B、充分条件

C、充分必要条件 D、无关条件

26、下列级数中绝对收敛的是

A、 B、

C、 D、

27、幂级数的收敛半径为

A、1 B、 C、2 D、0

28、微分方程 $y^3 + (y')^6 + xy^3 + x^4y^2 = 1$ 的阶数是

A、1 B、2 C、3 D、6

29、微分方程的通解为

A、 $y = \pm 1$ B、 $y = \sin x + c$

C、 $y = \cos(x + c)$ D、 $y = \sin(x + c)$

30、微分方程满足初始条件 $y(0)=0$ 的特解为

A、 $y = \cos x - 1$ B、 $y = \cos x$

C、 $y = \sin x$ D、 $y = -\cos x + 1$

二、填空题(每空 2 分，共 20 分)

1、 a, b 为常数，要使

，则 $b =$ (1) 。

2、设由 $y = \sin(x + y)$ 确定隐函数 $y = y(x)$ ，则 $dy =$ (2) 。

3、设当 $x \rightarrow 0$ 时与 ax 是等价无穷小，则常数 $a =$ (3) 。

4、 $=$ (4) 。

5、 $=$ (5) 。

6、设 $f(x, y) =$ ，则 $f'_x(1, 2) =$ (6) 。

7、交换积分顺序

$=$ (7) 。

8、函数 e^{-2x} 的麦克劳林级数中 x^n 的系数为 (8) 。

9、微分方程 $y'' - 2y' + 5y = 0$ 的通解为 (9) 。

10、函数 $y=\ln x$ 在区间 $[1,e]$ 上满足拉格朗日中值定理条件的 $\xi=$ (10) 。

三、解答题(每小题 5 分，共 30 分)

1、求.

2、设 $y=\cos 2e^{-3x}$, 求 y' .

3、求 $\int x^2 e^{-x} dx$.

4、求到两点 $A(1, 0, -1)$, $B(3, -2, 1)$ 距离相等的点的轨迹，并指出该轨迹的名称.

5、判断下列级数的敛散性：

(1) ; (2).

6、求微分方程满足初始条件 $y(0)=0$ 的特解.

四、(本题 8 分)

设平面图形由曲线 $xy=1$ 与直线 $y=2$, $x=3$ 围成，求

(1)平面图形的面积 S

(2)此平面图形绕 X 轴旋转所成的旋转体体积 V

五、(本题 8 分)

某工厂生产甲、乙两种产品,单位售价分别为 40 元和 60 元,若生产 X 单位甲产品,生产 y 单位乙产品的总费用为 $20x + 30y + 0.1(2x^2 - 2xy + 3y^2) + 100$,试求出甲、乙两种各生产多少时取得最大利润。

六、(本题 4 分)

求证方程 $x - \sin x - 1 = 0$ 在区间 $[-\pi, 2]$ 内有唯一零点。

参考答案

一、选择题(本题共 30 分)

1.B 2.A 3.D 4.C 5.C

6.A 7.C 8.D 9.B 10.A

11.B 12.A 13.C 14.C 15.A

16.D 17.C 18.D 19.B 20.B

21.B 22.A 23.A 24.C 25.A

26.D 27.B 28.C 29.D 30.D

二、填空题(每小题 2 分 , 共 20 分)

1、 1

2、

3、

4、 $e^4 - 1$

5、 $\arctg x + \ln(1 + x^2) + c$

6、

7、

8、

9、 $e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$

10、 $e - 1$

三、(每小题 5 分，共 20 分)

1、解 原式=

(3 分)

$=1$ (2 分)

2、解 $y' = 2\cos e^{-3x} \cdot (e^{-3x})'$

(2 分)

$= 2\cos e^{-3x} \cdot (-\sin e^{-3x}) \cdot (e^{-3x})'$

(2 分)

$$= 3\sin(2e - 3x) \cdot e^{-3x} (1 \text{ 分})$$

3、解 原式 = $-\int x^2 de^{-x}$

$$= -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx (2 \text{ 分})$$

$$= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + 2 \int e^{-x} dx$$

$$= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + c (2 \text{ 分})$$

$$= -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + c (1 \text{ 分})$$

4、解 设点 (x, y, z) 到 A, B 距离相等, 则

(2 分)

两边平方 并化简得

$$2x - 2y + 2z - 6 = 0 (2 \text{ 分})$$

该轨迹称为平面(1 分)

5、解：(1)∵

而等比级数收敛，

∴原级数收敛(3 分)

(2)∵ $1 \neq 0$ ，

∴原级数发散。(2 分)

6、解 原方程可化为，

即(1 分)

积分得(2 分)

以 $x=0, y=0$ 代入上式，

求得 $c=0$ 。(1 分)

∴所求特解为 $y = -1$ (1 分)

(注：也可用一阶线性方程求解)

四、(本题 8 分)

解：(1) $S =$ (3 分)

$= 5 - 5 - \ln 6$ (1 分)

(2) $V =$ (3 分)

$=$ (1 分)

五、(本题 8 分)

解：总收入为 $40x + 60y$ ，总利润为

$z = 40x + 60y - (20x + 30y + 0.1(2x^2 - 2xy + 3y^2) + 100) = 20x + 30y - 0.2x^2 + 0.2xy - 0.3y^2 -$

100 (2 分)

令(2分)

解得 $x=90, y=80$ (2分)

而 $= -0.4, = 0.2,$

$= -0.6$

$\Delta = 0.22 - (-0.4) \cdot (-0.6) < 0$, 而 $= -0.4 < 0$

$\therefore x=90, y=80$ 为极大值点

因极值点唯一，故它就是最大值点。(2分)

答：当甲产品生产 90 单位，乙产品生产 80 单位时利润最大。

六、(本题 4 分)

证：设 $f(x) = x - \sin x - 1$,

在 $0 \leq x \leq 2$ 上连续，

$$\therefore f(0) = -2 < 0,$$

$$f(2) = 1 - \sin 2 > 0,$$

$\therefore f(x)$ 在 $[0, 2]$ 内有零点。(2 分)

$$\text{又 } f'(x) = 1 - \cos x > 0 \quad (0 < x < 2)$$

$\therefore f(x)$ 严格单调上升, $\therefore f(x)$ 只有唯一的零点。(2 分)

《高等数学》试题库

一、选择题

(一) 函数

1、下列集合中 () 是空集。

$a. \{0,1,2\} \cap \{0,3,4\}$ $b. \{1,2,3\} \cap \{5,6,7\}$ $c. \{(x,y) | y=x \text{ 且 } y=2x\}$ $d. \{x | x \neq 0\}$

2、下列各组函数中是相同的函数有 ()。

$a. f(x)=x, g(x)=(\sqrt{x})^2$ $b. f(x)=|x|, g(x)=\sqrt{x^2}$

$c. f(x)=1, g(x)=\sin^2 x + \cos^2 x$ $d. f(x)=\frac{x^3}{x}, g(x)=x^2$

3、函数 $f(x)=\frac{1}{\lg|x-5|}$ 的定义域是 ()。

$a. (-\infty, 5) \cup (5, +\infty)$ $b. (-\infty, 6) \cup (6, +\infty)$

$c. (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$ $d. (-\infty, 4) \cup (4, 5) \cup (5, 6) \cup (6, +\infty)$

4、设函数
$$\begin{cases} x+2 & -\infty < x < 0 \\ 2^x & 0 \leq x < 2 \\ (x-2)^2 & 2 \leq x < +\infty \end{cases}$$
 则下列等式中，不成立的是 ()。

$a. f(0)=f(1)$ $b. f(0)=f(-1)$ $c. f(-2)=f(2)$ $d. f(-1)=f(3)$

5、下列函数中，() 是奇函数。

$a. \frac{|x|}{x}$ $b. x^2 \sin x$ $c. \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$ $d. \frac{10^x - 10^{-x}}{2}$

6、下列函数中，有界的是 ()。

$a. y = \arctg x$ $b. y = \tg x$ $c. y = \frac{1}{x}$ $d. y = 2^x$

7、若 $f(x-1)=x(x-1)$ ，则 $f(x)=(\quad)$ 。

$a. x(x+1)$ $b. (x-1)(x-2)$ $c. x(x-1)$ $d. \text{不存在}$

8、函数 $y = |\sin x|$ 的周期是 ()。

$a.4\pi \quad b.2\pi \quad c.\pi \quad d.\frac{\pi}{2}$

9、下列函数不是复合函数的有 ()。

$a.y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad b.y = \sqrt{-(1-x)^2} \quad c.y = \lg \sin x \quad d.y = e^{\sqrt{1+\sin x}}$

10、下列函数是初等函数的有 ()。

$a.y = \frac{x^2-1}{x-1} \quad b.y = \begin{cases} 1+x & x > 0 \\ x^2 & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$
 $c.y = \sqrt{-2-\cos x} \quad d.y = \left(\frac{\sin(e^x-1)}{\lg(1+x^2)}\right)^{\frac{1}{2}}$

11、区间 $[a, +\infty)$, 表示不等式 ()。

(A) $a < x < +\infty$ (B) $a \leq x < +\infty$ (C) $a < x$ (D) $a \leq x$

12、若 $\varphi(t) = t^3 + 1$, 则 $\varphi(t^3 + 1) = ()$ 。

(A) $t^3 + 1$ (B) $t^6 + 1$ (C) $t^6 + 2$ (D) $t^9 + 3t^6 + 3t^3 + 2$

13、函数 $y = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 是 ()。

(A) 偶函数 (B) 奇函数 (C) 非奇非偶函数 (D) 既是奇函数又是偶函数

14、函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形对称于直线 ()。

(A) $y = 0$ (B) $x = 0$ (C) $y = x$ (D) $y = -x$

15、函数 $y = 10^{x-1} - 2$ 的反函数是 ()。

(A) $y = \frac{1}{2} \lg \frac{x}{x-2}$ (B) $y = \log_x 2$
 (C) $y = \log_2 \frac{1}{x}$ (D) $y = 1 + \lg(x+2)$

16、函数 $y = |\sin x| + |\cos x|$ 是周期函数, 它的最小正周期是 ()。

(A) 2π (B) π (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

17、设 $f(x) = x + 1$, 则 $f(f(x) + 1) = ()$ 。

A . x B . $x+1$ C . $x+2$ D . $x+3$

18、下列函数中，() 不是基本初等函数 .

A . $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ B . $y = \ln x^2$ C . $y = \frac{\sin x}{\cos x}$ D . $y = \sqrt[3]{x^5}$

19、若函数 $f(e^x)=x+1$ ，则 $f(x)=($)

A. $e^x + 1$ B. $x+1$ C. $\ln(x+1)$ D. $\ln x+1$

20、若函数 $f(x+1)=x^2$ ，则 $f(x)=($)

A. x^2 B. $(x+1)^2$ C. $(x-1)^2$ D. x^2-1

21、若函数 $f(x)=\ln x$ ， $g(x)=x+1$ ，则函数 $f(g(x))$ 的定义域是()

A. $x>0$ B. $x\geq 0$ C. $x\geq 1$ D. $x>-1$

22、若函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$ 则函数 $f(\ln x+1)$ 的定义域是()

A. $(0, 1)$ B. $(-1, 0)$ C. $(e^{-1}, 1)$ D. (e^{-1}, e)

23、函数 $f(x)=|x-1|$ 是()

A. 偶函数 B. 有界函数 C. 单调函数 D. 连续函数

24、下列函数中为奇函数的是()

A. $y=\cos(1-x)$ B. $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ C. e^x D. $\sin x^2$

25、若函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 内的任意函数，则下列函数中() 是偶函数。

A. $f(|x|)$ B. $|f(x)|$ C. $[f(x)]^2$ D. $f(x)-f(-x)$

26、函数 $y = \frac{x \sin x}{1+x^2}$ 是()

A. 偶函数 B. 奇函数 C. 非奇非偶函数 D. 既是奇函数又是偶函数

27、下列函数中() 是偶函数。

A. $y = x^2 \sin x + 1$ B. $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$ C. $y = f(x) + f(-x)$ D. $y = f(x) - f(-x)$

28、下列各对函数中，() 中的两个函数相等。

A. $f(x) = \sqrt{x^2}$, $g(x) = x$ B. $f(x) = \frac{x \ln x - x}{x^2}$, $g(x) = \frac{\ln x - 1}{x}$
C. $f(x) = \ln x^2$, $g(x) = 2 \ln x$ D. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, $g(x) = x + 1$

(二) 极限与连续

1、下列数列发散的是 ()。

a、 $0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, \dots$ b、 $\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

c、 $f(n) = \begin{cases} \frac{2^n + 1}{2^n} & n \text{ 为奇数} \\ \frac{2^n - 1}{2^n} & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ d、 $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{n+1} & n \text{ 为奇数} \\ \frac{n}{1-n} & n \text{ 为偶数} \end{cases}$

2、当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\arctg x$ 的极限 ()。

a、 $\frac{\pi}{2}$ b、 $-\frac{\pi}{2}$ c、 ∞ d、不存在, 但有界

3、 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1}$ ()。

a、 -1 b、 1 c、 0 d、不存在

4、当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列变量中是无穷小量的有 ()。

a、 $\sin \frac{1}{x}$ b、 $\frac{\sin x}{x}$ c、 $2^{-x} - 1$ d、 $\ln|x|$

5、下列变量在给定的变化过程中是无穷大量的有 ()。

a、 $\lg x (x \rightarrow 0^+)$ b、 $\lg x (x \rightarrow 1)$ c、 $\frac{x^2}{x^3 + 1} (x \rightarrow +\infty)$ d、 $e^{\frac{1}{x}} (x \rightarrow 0^-)$

6、如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$, 则必有 ()。

a、 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \infty$ b、 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = 0$

c、 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) + g(x)} = 0$ d、 $\lim_{x \rightarrow x_0} kf(x) = \infty$ (k 为非零常数)

7、 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 - 1} =$ ()。

a、 1 b、 2 c、 0 d、 $\frac{1}{2}$

8、下列等式中成立的是 ()。

a、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e$ b、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+2} = e$

c、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = e$ d、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = e$

9、当 $x \rightarrow 0$ 时， $1 - \cos x$ 与 $x \sin x$ 相比较 ()。

a、是低阶无穷小量 b、是同阶无穷小量

c、是等阶无穷小量 d、是高阶无穷小量

10、函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义，是 $f(x)$ 在该点处连续的 ()。

a、充要条件 b、充分条件 c、必要条件 d、无关的条件

11、若数列 $\{x_n\}$ 有极限 a ，则在 a 的 ε 邻域之外，数列中的点 ()。

(A) 必不存在 (B) 至多只有有限多个

(C) 必定有无穷多个 (D) 可以有有限个，也可以有无限多个

12、设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ ax + b, & x > 0 \end{cases}$ ，若 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在，则必有 ()。

(A) $a = 0, b = 0$ (B) $a = 2, b = -1$ (C) $a = -1, b = 2$ (D) a 为任意常数, $b = 1$

13、数列 $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \dots$ ()。

(A) 以 0 为极限 (B) 以 1 为极限 (C) 以 $\frac{n-2}{n}$ 为极限 (D) 不存在极限

14、数列 $\{y_n\}$ 有界是数列收敛的 ()。

(A) 必要条件 (B) 充分条件 (C) 充要条件 (D) 无关条件

15、当 $x \rightarrow 0$ 时，() 是与 $\sin x$ 等价的无穷小量。

(A) $\tan 2x$ (B) $\sqrt{x}$ (C) $\frac{1}{2} \ln(1+2x)$ (D) $x(x+2)$

16、若函数 $f(x)$ 在某点 x_0 极限存在，则 ()。

(A) $f(x)$ 在 x_0 的函数值必存在且等于极限值

(B) $f(x)$ 在 x_0 的函数值必存在，但不一定等于极限值

(C) $f(x)$ 在 x_0 的函数值可以不存在 (D) 如果 $f(x_0)$ 存在则必等于极限值

17、如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 存在，则 ()。

- (A) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- (B) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在但不一定有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- (C) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不一定存在
- (D) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 一定不存在

18、无穷小量是 ()。

- (A) 比 0 稍大一点的一个数 (B) 一个很小很小的数
- (C) 以 0 为极限的一个变量 (D) 0 数

19、无穷大量与有界量的关系是 ()。

- (A) 无穷大量可能是有界量 (B) 无穷大量一定不是有界量
- (C) 有界量可能是无穷大量 (D) 不是有界量就一定是无穷大量

20、指出下列函数中当 $x \rightarrow 0^+$ 时 () 为无穷大量。

- (A) $2^{-x} - 1$ (B) $\frac{\sin x}{1 + \sec x}$ (C) e^{-x} (D) $\frac{1}{e^x}$

21、当 $x \rightarrow 0$ 时，下列变量中 () 是无穷小量。

- A. $\frac{\sin x}{x}$ B. $1 - e^x$ C. $\frac{x}{x^2 - x}$ D. $\frac{\ln(1+x)}{x}$

22、下列变量中 () 是无穷小量。

- A. $e^{\frac{1}{x}}$ ($x \rightarrow 0$) B. $\sin \frac{1}{x}$ ($x \rightarrow 0$) C. $\frac{x-3}{x^2-9}$ ($x \rightarrow 3$) D. $\ln x$ ($x \rightarrow 1$)

23、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{2x} =$ ()

- A. 1 B. 0 C. 1/2 D. 2

24、下列极限计算正确的是 ()

- A. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ B. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$ C. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 1$ D. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$

25、下列极限计算正确的是 ()

- A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$ B. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ C. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6} = \frac{12}{5}$ D. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = 1$

26、设 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 0 \\ 2x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 B. $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续，但有极限

C. $f(x)$ 在 $x=0$ 处无极限

D. $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 但无极限

27、若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 则 ().

(A) 当 $g(x)$ 为任意函数时, 才有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$ 成立

(B) 仅当 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ 时, 才有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$ 成立

(C) 当 $g(x)$ 为有界时, 有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$ 成立

(D) 仅当 $g(x)$ 为常数时, 才能使 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$ 成立

28、设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 都不存在, 则 ().

(A) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ 及 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)]$ 一定都不存在

(B) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ 及 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)]$ 一定都存在

(C) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ 及 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)]$ 中恰有一个存在, 而另一个不存在

(D) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ 及 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)]$ 有可能都存在

29、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}) = ()$.

(A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$

(B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \infty$

(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+n)n}{2n^2} = \frac{1}{2}$

(D) 极限不存在

30、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ 的值为 ().

(A) 1 (B) ∞ (C) 不存在 (D) 0

31、 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = ()$.

(A) ∞ (B) 不存在 (C) 1 (D) 0

32、 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(1-x)}{(x+1)^2(x+2)} = ()$.

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) 0 (D) $\frac{2}{3}$

33、 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{x})^{2x} = (\quad)$.

- (A) e^{-2} (B) ∞ (C) 0 (D) $\frac{1}{2}$

34、无穷多个无穷小量之和 ().

- (A) 必是无穷小量 (B) 必是无穷大量
(C) 必是有界量 (D) 是无穷小, 或是无穷大, 或有可能是有界量

35、两个无穷小量 α 与 β 之积 $\alpha\beta$ 仍是无穷小量, 且与 α 或 β 相比 ().

- (A) 是高阶无穷小 (B) 是同阶无穷小
(C) 可能是高阶无穷小, 也可能是同阶无穷小 (D) 与阶数较高的那个同阶

36、设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin \frac{x}{3} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$, 要使 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 处连续, 则 $a = (\quad)$.

- (A) 0 (B) 1 (C) $1/3$ (D) 3

37、点 $x = 1$ 是函数 $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ 3 - x & x > 1 \end{cases}$ 的 ().

- (A) 连续点 (B) 第一类非可去间断点
(C) 可去间断点 (D) 第二类间断点

38、方程 $x^4 - x - 1 = 0$ 至少有一个根的区间是 ().

- (A) $(0, 1/2)$ (B) $(1/2, 1)$ (C) $(2, 3)$ (D) $(1, 2)$

39、设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, 则 $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的 ().

- (A) 可去间断点 (B) 无穷间断点 (C) 连续点 (D) 跳跃间断点

40、 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{x} & x \neq 0 \\ k & x = 0 \end{cases}$, 如果 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 那么 $k = (\quad)$.

(A) 0 (B) 2 (C) 1/2 (D) 1

41、下列极限计算正确的是 () .

(A) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ (B) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ (C) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$ (D) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$

42、若 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9} = -\frac{1}{16}$, 则 $f(x) = ()$.

(A) $x+1$ (B) $x+5$ (C) $\sqrt{x+13}$ (D) $\sqrt{x+6}$

43、方程 $x^4 - x - 1 = 0$ 至少有一个实根的区域是 () .

(A) (0, 1/2) (B) (1/2, 1) (C) (2, 3) (D) (1, 2)

44、函数 $f(x) = \sqrt{25 - x^2} + \frac{x - 10}{\ln x}$ 的连续区间是 () .

(A) (0, 5) (B) (0, 1) (C) (1, 5) (D) $(0, 1) \cup (1, 5)$

(三) 导数与微分

1、设函数 $f(x)$ 可导且下列极限均存在, 则不成立的是 () .

a、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$ b、 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} = f'(x_0)$

c、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + 2h) - f(a)}{h} = f'(a)$ d、 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} = f'(x_0)$

2、设 $f(x)$ 可导且下列极限均存在, 则 () 成立.

A、 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{2} f'(x_0)$

B、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$

C、 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$

D、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + 2h) - f(a)}{h} = f'(a)$

3、已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - x & x \leq 0 \\ e^{-x} & x > 0 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处 () .

① 导数 $f'(0) = -1$ ② 间断
③ 导数 $f'(0) = 1$ ④ 连续但不可导

4、设 $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$ ，则 $f'(0) = (\quad)$ 。

a、3 b、-3 c、6 d、-6

5、设 $f(x) = x \ln x$ ，且 $f'(x_0) = 2$ ，则 $f(x_0) = (\quad)$ 。

a、 $\frac{2}{e}$ b、 $\frac{e}{2}$ c、e d、1

6、设函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x & x > 1 \\ x-1 & x < 1 \end{cases}$ ，则 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处 $(\quad)$ 。

a、连续但不可导 b、连续且 $f'(1)=1$ c、连续且 $f'(1)=0$ d、不连续

7、设函数 $f(x) = \begin{cases} xe^x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处 $(\quad)$ 不成立。

a、可导 b、连续 c、可微 d、连续，不可导

8、函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续是在该点处可导的 $(\quad)$ 。

a、必要但不充分条件 b、充分但不必要条件

c、充要条件 d、无关条件

9、下列结论正确的是 $(\quad)$ 。

a、初等函数的导数一定是初等函数 b、初等函数的导数未必是初等函数

c、初等函数在其有定义的区间内是可导的 d、初等函数在其有定义的区间内是可微的

10、下列函数中 $(\quad)$ 的导数不等于 $\frac{1}{2} \sin 2x$ 。

a、 $\frac{1}{2} \sin^2 x$ b、 $\frac{1}{4} \cos 2x$ c、 $-\frac{1}{2} \cos^2 x$ d、 $1 - \frac{1}{4} \cos 2x$

11、已知 $y = \cos x$ ，则 $y^{(8)} = (\quad)$ 。

a、 $\sin x$ b、 $\cos x$ c、 $-\sin x$ d、 $-\cos x$

12、设 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ，则 $y' = (\quad)$ 。

① $\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$ ② $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

$$\textcircled{3} \frac{2x}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \quad \textcircled{4} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

13、已知 $y = e^{f(x)}$ ，则 $y'' = (\quad)$ 。

a、 $e^{f(x)} f''(x)$ b、 $e^{f(x)}$

c、 $e^{f(x)} [f'(x) + f''(x)]$ d、 $e^{f(x)} \{ [f'(x)]^2 + f''(x) \}$

14、已知 $y = \frac{1}{4} x^4$ ，则 $y'' = (\quad)$ 。

A. x^3 B. $3x^2$ C. $6x$ D. 6

15、设 $y = f(x)$ 是可微函数，则 $df(\cos 2x) = (\quad)$ 。

A. $2f'(\cos 2x)dx$ B. $f'(\cos 2x) \sin 2x dx$ C. $2f'(\cos 2x) \sin 2x dx$ D.

$-f'(\cos 2x) \sin 2x dx$

16、若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $(\quad)$ 是错误的。

A. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义 B. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ，但 $A \neq f(x_0)$

C. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续 D. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微

17、下列等式中， $(\quad)$ 是正确的。

A. $\frac{1}{\sqrt{2x}} dx = d(\sqrt{2x})$ B. $\ln x dx = d\left(\frac{1}{x}\right)$

C. $-\frac{1}{x} dx = d\left(\frac{1}{x^2}\right)$ D. $\sin x dx = d(\cos x)$

18、设 $y = F(x)$ 是可微函数，则 $dF(\cos x) = (\quad)$

A. $F'(\cos x) dx$ B. $F'(\cos x) \sin x dx$ C. $-F'(\cos x) \sin x dx$ D. $\sin x dx$

19、下列等式成立的是 $(\quad)$ 。

A. $\frac{1}{\sqrt{x}} dx = d\sqrt{x}$ B. $\frac{1}{x} dx = -d\left(\frac{1}{x^2}\right)$

C. $\sin x dx = d(\cos x)$ D. $a^x dx = \frac{1}{\ln a} d a^x \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$

20、 $d(\sin 2x) = (\quad)$

A. $\cos 2x dx$ B. $-\cos 2x dx$ C. $2\cos 2x dx$ D. $-2\cos 2x dx$

21、 $f(x) = \ln|x|$ ， $df(x) = (\quad)$

A. $\frac{1}{|x|} dx$ B. $\frac{1}{|x|}$ C. $\frac{1}{x}$ D. $\frac{1}{x} dx$

22、若 $f(x) = 2^x$ ，则

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0-\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = (\quad)$$

A. 0 B. 1 C. $-\ln 2$ D. $1/\ln 2$

23、曲线 $y=e^{2x}$ 在 $x=2$ 处切线的斜率是()
A. e^4 B. e^2 C. $2e^2$ D. 2

24、曲线 $y = \sqrt{x} + 1$ 在 $x=1$ 处的切线方程是 ()
A. $y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$ B. $y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$ C. $y = -\frac{x}{2} - \frac{3}{2}$ D. $y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$

25、曲线 $y = x^2 - 2x$ 上切线平行于 x 轴的点是 ()。
A、(0, 0) B、(1, -1) C、(-1, -1) D、(1, 1)

(四) 中值定理与导数的应用

1、下列函数在给定区间上不满足拉格朗日定理的有 ()。

a、 $y = |x|$ $[-1, 2]$ b、 $y = 4x^3 - 5x^2 + x - 1$ $[0, 1]$

c、 $y = \ln(1+x^2)$ $[0, 3]$ d、 $y = \frac{2x}{1+x^2}$ $[-1, 1]$

2、函数 $y = x^3 + x + 2$ 在其定义域内 ()。

a、单调减少 b、单调增加 c、图形下凹 d、图形上凹

3、下列函数在指定区间 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加的是 ()。

A. $\sin x$ B. e^x C. x^2 D. $3-x$

4、下列结论中正确的有 ()。

a、如果点 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点，则有 $f'(x_0)=0$ ；

b、如果 $f'(x_0)=0$ ，则点 x_0 必是函数 $f(x)$ 的极值点；

c、如果点 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点，且 $f'(x_0)$ 存在，则必有 $f'(x_0)=0$ ；

d、函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内的极大值一定大于极小值。

5、函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续但不可导，则该点一定 ()。

a、是极值点 b、不是极值点 c、不是拐点 d、不是驻点

6、如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内恒有 $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$, 则函数的曲线为 ()。

a、上凹上升 b、上凹下降 c、下凹上升 d、下凹下降

7、如果函数 $y = 2 + x - x^2$ 的极大值点是 $x = \frac{1}{2}$, 则函数 $y = \sqrt{2 + x - x^2}$ 的极大值是 ()。

a、 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b、 $\frac{9}{4}$ c、 $\frac{81}{16}$ d、 $\frac{3}{2}$

8、当 $x < x_0$ 时, $f''(x) > 0$; 当 $x > x_0$ 时, $f''(x) < 0$, 则下列结论正确的是 ()。

a、点 x_0 是函数 $f(x)$ 的极小值点

b、点 x_0 是函数 $f(x)$ 的极大值点

c、点 $(x_0, f(x_0))$ 必是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

d、点 x_0 不一定是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

9、当 $x > x_0$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x < x_0$ 时, $f'(x) < 0$, 则点 x_0 一定是函数 $f(x)$ 的 ()。

a、极大值点 b、极小值点 c、驻点 d、以上都不对

10、函数 $f(x) = 2x^2 - \ln x$ 的单调增加区间是

A. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 和 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ B. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 和 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ C. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

11、函数 $f(x) = x^3 + x$ 在 ()

A. $(-\infty, +\infty)$ 单调减少 B. $(-\infty, +\infty)$ 单调增加

C. $(-\infty, -1)$ 单调减少, $(-1, +\infty)$ 单调增加 D. $(-\infty, 0)$ 单调减少, $(0, +\infty)$ 单调增加

12、函数 $f(x) = x^2 + 1$ 在 $[0, 2]$ 上 ()

A. 单调增加 B. 单调减少 C. 不增不减 D. 有增有减

13、若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极值, 则 ()

A. $f'(x_0) = 0$ B. $f'(x_0)$ 不存在 C. $f(x)$ 在点 x_0 处连续 D. $f'(x_0) = 0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在

14、函数 $y = |x+1| + 2$ 的最小值点是 ()。

A. 0 B. 1 C. -1 D. 2

15、函数 $f(x) = e^x - x - 1$ 的驻点为 ()。

A. $x=0$ B. $x=2$ C. $x=0, y=0$ D. $x=1, y=e-2$

16、若 $f'(x) = 0$, 则 x_0 是 $f(x)$ 的 ()

A. 极大值点 B. 最大值点 C. 极小值点 D. 驻点

17、若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0)}{2h} =$$

- A. $f'(x_0)$ B. $2f'(x_0)$ C. $-f'(x_0)$ D. $-2f'(x_0)$

18、若 $f(\frac{1}{x}) = x$, 则 $f'(x) = (\quad)$

- A. $\frac{1}{x}$ B. $-\frac{1}{x}$ C. $\frac{1}{x^2}$ D. $-\frac{1}{x^2}$

19、函数 $y = \frac{x^3}{3} - x$ 单调增加区间是 ()

- A. $(-\infty, -1)$ B. $(-1, 1)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$

20、函数 $y = \frac{1}{x}$ 单调下降区间是 ()

- A. $(-\infty, +\infty)$ B. $(-\infty, 0)$ C. $(0, +\infty)$ D. $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$

21、 $y = x^2 - 4x + 1$ 在区间 $(1, 2)$ 上是 () ;

- (A) 单调增加的 (B) 单调减少的 (C) 先增后减 (D) 先减后增

22、曲线 $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$ 的垂直渐近线是 () ;

- (A) $y = \pm 1$ (B) $y = 0$ (C) $x = \pm 1$ (D) $x = 0$

23、设五次方程 $a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0$ 有五个不同的实根, 则方程

$5a_0x^4 + 4a_1x^3 + 3a_2x^2 + 2a_3x + a_4 = 0$ 最多有()实根.

- A、5个 B、4个 C、3个 D、2个

24、设 $f(x)$ 的导数在 $x=2$ 连续, 又 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{x-2} = -1$, 则

- A、 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极小值点 B、 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极大值点

- C、 $(2, f(2))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

- D、 $x=2$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(2, f(2))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

25、点 $(0, 1)$ 是曲线 $y = ax^3 + bx^2 + c$ 的拐点, 则().

- A、 $a \neq 0, b=0, c=1$ B、 a 为任意实数, $b=0, c=1$

- C、 $a=0, b=1, c=0$ ↓ D、 $a=-1, b=2, c=1$

26、设 p 为大于 1 的实数，则函数 $f(x) = x^p = (1-x)^p$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值是 ()。

- A、1 B、2 C、 $\frac{1}{2^{p-1}}$ D、 $\frac{1}{2^p}$

27、下列需求函数中，需求弹性为常数的有 ()。

- a、 $Q = aP$ b、 $Q = aP + b$ c、 $Q = \frac{a}{P^2} + 1$ d、 $Q = ae^{-bP}$

28、设总成本函数为 $C(Q)$ ，总收益函数为 $R(Q)$ ，边际成本函数为 MC ，边际收益函数为 MR ，

假设当产量为 Q_0 时，可以取得最大利润，则在 $Q = Q_0$ 处，必有 ()。

- a、 $MR < MC$ b、 $MR = MC$ c、 $MR > MC$ d、以上都不对

29、设某商品的需求函数为 $q(p) = 10e^{-\frac{p}{2}}$ ，则当 $p = 6$ 时，需求弹性为 ()。

- A. $-5e^{-3}$ B. -3 C. 3 D. $-\frac{1}{2}$

30、已知需求函数 $q(p) = 2e^{-0.4p}$ ，当 $p = 10$ 时，需求弹性为 ()

- A. $2e^{-4}$ B. -4 C. 4 D. $2e^4$

(五) 不定积分

1、 $\int x d(e^{-x}) = ()$ 。

- A. $xe^{-x} + c$ B. $xe^{-x} + e^{-x} + c$ C. $-xe^{-x} + c$ D. $xe^{-x} - e^{-x} + c$

2、下列等式成立的是 ()。

- A. $\ln x dx = d \frac{1}{x}$ B. $\frac{1}{x} dx = -d \frac{1}{x^2}$ C. $\cos x dx = d \sin x$ D. $\frac{1}{x^2} dx = d \frac{1}{x}$

3、若 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的原函数，则 ()。

(A) $\int f(x) dx = g(x) + C$ (B) $\int g(x) dx = f(x) + C$

(C) $\int g'(x) dx = g(x) + C$ (D) $\int f'(x) dx = g(x) + C$

4、如果 $\int df(x) = \int dg(x)$ ，则一定有 ()。

(A) $f(x) = g(x)$ (B) $f'(x) = g'(x)$

(C) $df(x) = dg(x)$ (D) $d \int f(x) = d \int g(x)$

5、若 $\int f(x)dx = x^2 e^{2x} + c$, 则 $f(x) = (\quad)$.

(A) $2xe^{2x}$

(B) $2x^2 e^{2x}$

(C) xe^{2x}

(D) $2xe^{2x}(1+x)$

6、若 $\int f(x)dx = F(x) + C$, 则 $\int e^{-x} f(e^{-x})dx = (\quad)$.

(A) $F(e^x) + c$

(B) $-F(e^{-x}) + c$

(C) $F(e^{-x}) + c$

(D) $F(e^x) + c$

7、设 e^{-x} 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int xf(x)dx = (\quad)$.

(A) $e^{-x}(1-x) + c$

(B) $e^{-x}(x+1) + c$

(C) $e^{-x}(x-1) + c$

(D) $-e^{-x}(x+1) + c$

8、设 $f(x) = e^{-x}$, 则 $\int \frac{f'(\ln x)}{x} dx = (\quad)$.

(A) $-\frac{1}{x} + c$

(B) $-\ln x + c$

(C) $\frac{1}{x} + c$

(D) $\ln x + c$

9、若 $\int f(x)dx = x^2 + c$, 则 $\int xf(1-x^2)dx = (\quad)$.

(A) $2(1-x^2)^2 + c$

(B) $-2(1-x^2)^2 + c$

(C) $\frac{1}{2}(1-x^2)^2 + c$

(D) $-\frac{1}{2}(1-x^2)^2 + c$

10、 $\int \sin 2x dx = (\quad)$.

(A) $\frac{1}{2} \cos 2x + c$

(B) $\sin^2 x + c$

(C) $-\cos^2 x + c$

(D) $-\frac{1}{2} \cos 2x + c$

11、 $\int \frac{dx}{1+\cos x} = (\quad)$.

(A) $\operatorname{tg} x - \sec x + c$

(B) $-\operatorname{ctg} x + \csc x + c$

(C) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} + c$

(D) $\operatorname{tg}(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})$

12、已知 $f'(e^x) = 1+x$, 则 $f(x) = (\quad)$.

(A) $1 + \ln x + C$ (B) $x + \frac{1}{2}x^2 + C$

(C) $\ln x + \frac{1}{2}\ln^2 x + C$ (D) $x \ln x + C$

13、函数 $f(x) = \sin|x|$ 的一个原函数是 ()。

(A) $-\cos|x|$ (B) $-\cos x$

(C) $F(x) = \begin{cases} -\cos x & x \geq 0 \\ \cos x - 2 & x < 0 \end{cases}$ (D) $F(x) = \begin{cases} -\cos x + C & x \geq 0 \\ \cos x + C & x < 0 \end{cases}$

14、幂函数的原函数一定是 ()。

A. 幂函数 B. 指数函数 C. 对数函数 D. 幂函数或对数函数

15、已知 $\int f(x)dx = F(x) + C$ ，则 $\int \frac{1}{x} f(\ln x)dx = ()$

A. $F(\ln x) + c$ B. $F(\ln x)$ C. $\frac{1}{x}F(\ln x) + c$ D. $F(\frac{1}{x}) + c$

16、下列积分值为零的是 ()

A. $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx$ B. $\int_{-1}^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx$ C. $\int_{-1}^1 \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx$ D. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + x) dx$

17、下列等式正确的是 ()。

A. $\frac{d}{dx} \int f(x)dx = f(x)$ B. $\frac{d}{dx} \int f(x)dx = f(x) + C$

C. $\frac{d}{dx} \int_a^b f(x) = f(x)$ D. $\int f'(x)dx = f(x)$

18、下列等式成立的是 ()。

A. $\frac{d}{dx} \int f(x)dx = f(x)$ B. $\int f'(x)dx = f(x)$

C. $d \int f(x)dx = f(x)$ D. $\int df(x)dx = f(x)$

19、若 $\int f(x)dx = \sin 2x + c$ ，则 $f(x) =$

A. $2\cos 2x$ B. $2\sin 2x$ C. $-2\cos 2x$ D. $-2\sin 2x$

20、若 $\int f(x)dx = e^{-2x} + c$ ，则 $f'(x) = ()$

A. $-2e^{-2x}$ B. $2e^{-2x}$ C. $-4e^{-2x}$ D. $4e^{-2x}$

21、若 $\int f(x)dx = F(x) + c$ ，则 $\int xf'(1-x^2)dx = ()$

A. $F(1-x^2) + c$ B. $\frac{1}{2}F(1-x^2) + c$ C. $-\frac{1}{2}F(1-x^2) + c$ D. $-F(1-x^2) + c$

22、若 $\int \frac{f'(\ln x)}{x} dx = x + c$ ，则 $f(x) = ()$

A. x B. e^x C. e^{-x} D. $\ln x$

(六) 定积分

1、下列积分正确的是 ()。

a、 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx$

b、 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_{-1}^1 = 0$

c、 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx = 2 \ln \left| \cos \frac{\pi}{4} \right| = 2 \ln \sqrt{2} - 2 \ln 2$

d、 $\int_{-1}^1 dx = x \Big|_{-1}^1 = 2$

2、下列 () 是广义积分。

a、 $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$ b、 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ c、 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ d、 $\int_{-1}^1 e^{-x} dx$

3、图 6—14 阴影部分的面积总和可按 () 的方法求出。

a、 $\int_a^b f(x) dx$

b、 $\left| \int_a^b f(x) dx \right|$

c、 $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b |f(x)| dx$

d、 $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

4、若 $\int_0^1 (x+k) dx = 2$ ，则 $k =$ ()

a、0 b、1 c、-1 d、 $\frac{3}{2}$

5、当 () 时，广义积分 $\int_{-\infty}^0 e^{-kx} dx$ 收敛。

a、 $k > 0$ b、 $k = 0$ c、 $k < 0$ d、 $k \leq 0$

6、下列无穷限积分收敛的是 ()。

A . $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ B . $\int_e^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$ C . $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$ D . $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$

7、定积分定义 $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 说明 ()。

(A) $[a, b]$ 必须 n 等分， ξ_i 是 $[x_{i-1}, x_i]$ 端点

(B) $[a, b]$ 可任意分法， ξ_i 必须是 $[x_{i-1}, x_i]$ 端点

(C) $[a, b]$ 可任意分法, $\lambda = \max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0$, ξ_i 可在 $[x_{i-1}, x_i]$ 内任取

(D) $[a, b]$ 必须等分, $\lambda = \max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0$, ξ_i 可在 $[x_{i-1}, x_i]$ 内任取

8、积分中值定理 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ 其中 ().

(A) ξ 是 $[a, b]$ 内任一点 (B) ξ 是 $[a, b]$ 内必定存在的某一点

(C) ξ 是 $[a, b]$ 内惟一的某点 (D) ξ 是 $[a, b]$ 内中点

9、 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续是 $\int_a^b f(x)dx$ 存在的 ().

(A) 必要条件 (B) 充分条件 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要

10、若设 $f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \sin(t-x)dt$, 则必有 ().

(A) $f(x) = -\sin x$ (B) $f(x) = -1 + \cos x$

(C) $f(x) = \sin x$ (D) $f(x) = 1 - \sin x$

11、函数 $F(x) = \int_0^x \frac{3t}{t^2 - t + 1} dt$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最小值为 ().

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) 0

12、设 $f''(u)$ 连续, 已知 $n \int_0^1 x f''(2x) dx = \int_0^2 t f''(t) dt$, 则 n 应是 ().

(A) 2 (B) 1 (C) 4 (D) $\frac{1}{4}$

13、设 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 则 $\Delta F(x) =$ ().

(A) $\int_0^x [f(t+\Delta t) - f(t)]dt$ (B) $f(x)\Delta x$

(C) $\int_0^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt$ (D) $\int_0^x f(x)d(t+\Delta t) - \int_0^x f(t)dt$

14、由连续函数 $y_1=f(x)$, $y_2=g(x)$ 与直线 $x=a$, $x=b(a < b)$ 围成的平面图形的面积为 ().

A. $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$ B. $\left| \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \right|$

C. $\int_a^b [g(x) - f(x)]dx$ D. $\int_a^b |f(x) - g(x)|dx$

15、 $\int_{-\pi}^{+\pi} (e^{\cos x} \sin x + x^2)dx =$ ()

A. $\frac{\pi^3}{3}$ B. $\frac{2\pi^3}{3}$ C. $2e^{-1} + \frac{2\pi^3}{3}$ D. $e^{-1} + \frac{2\pi^3}{3}$

16、 $\int_0^2 |x-1|dx =$

A. 0 B. 1 C. 2 D. -2

17、下列无穷积分中 () 收敛。

A. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ B. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ C. $\int_4^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$ D. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx$

18、无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = (\quad)$

A. ∞ B. 1 C. $\frac{1}{3}$ D. -1

19、 $\frac{d}{dx} [\int_0^{-x} (\arctan t)^2 dt] = (\quad)$ 。

(A) $2\arctan \frac{1}{1+t^2}$ (B) $-(\arctan x)^2$ (C) $(\arctan x)^2$ (D) $-(\arctan t)^2$

(七) 多元函数的微积分：

(1) 设 $f(x, y) = \ln xy, g(x, y) = \ln x + \ln y$, 则 $f(x, y) (\quad) g(x, y)$.

① $>$ ② $<$ ③ $=$ ④ $\neq$

(2) 设 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点的偏导数存在, 则 $f'_x(x_0, y_0) = (\quad)$.

① $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$

② $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$

③ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$

④ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$

(3) 设 $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$, 则 ().

① (x_0, y_0) 为极值点 ② (x_0, y_0) 为驻点

③ $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 有定义 ④ (x_0, y_0) 为连续点

(4) 在空间中, 下列方程 () 为球面, () 为抛物面, () 为柱面.

① $x^2 - 4y + z = 25$ ② $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$

③ $y = x^2$ ④ $x^2 + y^2 = 1$

⑤ $z = y^2$ ⑥ $x^2 + y^2 + 2y = 2x - z^2$

(5) 设 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处偏导数存在, 则 $f(x, y)$ 在该点 ().

① 极限存在 ② 连续

③ 可微 ④ 以上结论均不成立

(6) 设 D 由 x 轴、 $y = \ln x$ 、 $x = e$ 围成, 则 $\iint_D f(x, y) dx dy = (\quad)$.

① $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy$ ② $\int_0^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy$

$$\textcircled{3} \int_0^1 dy \int_0^{e^y} f(x, y) dx \quad \textcircled{4} \int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx$$

(7) 当 $a = (\quad)$ 时, 有 $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = \pi$.

① 1 ② $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ ③ $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ ④ $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

二、填空：

(一) 函数：

1、设 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & -1 \leq x < 0 \\ 2, & 0 \leq x < 1 \\ x-1, & 1 \leq x < 3 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的定义域是_____, $f(0) =$ _____, $f(1) =$ _____.

2、 $y = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$ 的定义域是_____, 值域是_____.

3、函数 $f(x) = \ln(x+5) - \frac{1}{\sqrt{2-x}}$ 的定义域是_____.

4、若 $f(x + \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 3$, 则 $f(x) =$ _____.

5、设 $f(\frac{1}{x}) = x + \sqrt{1+x^2}$, 则 $f(x) =$ _____.

6、若 $f(x) = \frac{1}{1-x}$, 则 $f(f(x)) =$ _____, $f(f(f(x))) =$ _____.

7、若函数 $f(x+1) = x^2 + 2x - 5$, 则 $f(x) =$ _____.

8、设函数 $f(x) = \frac{x}{1-x}$, 则 $f(\frac{1}{x}) =$ _____.

9、函数 $f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$ 是_____函数。

10、函数 $y = \frac{1}{x^2+1}$ 的定义域是区间_____;

11、函数 $y = 3^x - 1$ 的反函数是_____;

(二) 极限与连续：

1、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{n-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^n}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

3、已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^2 + bn + 5}{3n + 2} = 2$ ，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}.$

4、设 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^{kx} = e^{-3}$ ，则 $k = \underline{\hspace{2cm}}.$

5、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(5x+1)^{50}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

6、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

7、 $\lim_{x \rightarrow 0} (ax+b)^{1/x} (a > 0, b > 0, x > 0) = \underline{\hspace{2cm}}.$

8、如果 $x \rightarrow 0$ 时，要无穷小量 $(1 - \cos x)$ 与 $a \sin^2 \frac{x}{2}$ 等价， a 应等于 $\underline{\hspace{2cm}}.$

9、设 $f(x) = \begin{cases} ax+b & x \geq 0 \\ (a+b)x^2+x & x < 0 \end{cases}$ ， $a+b \neq 0$ ，则处处连续的充分必要条件是 $b = \underline{\hspace{2cm}}.$

10、 $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ ，则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ ；若无间断点，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

11、函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{1+x} & x \neq -1 \\ A & x = -1 \end{cases}$ ，当 $A = \underline{\hspace{2cm}}$ 时，函数 $f(x)$ 连续.

12、设 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - ax^2 - x + 4}{1+x}$ 有有限极限值 L ，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $L = \underline{\hspace{2cm}}.$

13、已知 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - x - 2} = 2$ ，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}.$

14、函数 $f(x) = \frac{x}{\ln|x-1|}$ 的间断点是 $\underline{\hspace{2cm}}$ ；

15、若 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{5}{x})^{-kx} = e^{-10}$, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$

16、当 $x \rightarrow \underline{\hspace{1cm}}$ 时, $y = \ln(1 + x^2)$ 为无穷大

17、如果函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow a$ 时的左右极限存在, 但 $f(x)$ 在 $x = a$ 处不连续, 则称间断点 $x = a$ 为

第 $\underline{\hspace{1cm}}$ 类间断点

(三) 导数与微分

1、若函数 $y = \ln \sqrt{3}$, 则 $y' = \underline{\hspace{2cm}}$.

2、若 $y = x(x-1)(x-2)(x-3)$, 则 $y'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

3、曲线 $y = \sqrt{x}$ 在点(4, 2)处的切线方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

4、设 $f(x)$ 是可导函数且 $f(0) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$;

5、曲线 $y = x + \arctan x$ 在 $x = 0$ 处的切线方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$;

6、设由方程 $e^y - e^x + xy = 0$ 可确定 y 是 x 的隐函数, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.

7、函数 $y = \tan x$ 在 $x = 0$ 处的导数为 $\underline{\hspace{2cm}}$;

(四) 中值定理 导数的应用

1、函数 $y = 3(x-1)^2$ 的单调增加区间是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

2、函数 $y = 3(x-1)^2$ 的驻点是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

3、设某产品的需求量 q 为价格 p 的函数, 且 $q = 1000e^{-0.5p}$, 则需求对价格的弹性为 $\underline{\hspace{2cm}}$

4、过点 (1,3) 且切线斜率为 $2x$ 的曲线方程是 $y =$ _____ .

5、函数 $y = e^{-x^2}$ 的拐点为_

6、函数 $y = e^{-x^2}$ 的单调递增区间为_____，最大值为_____

7、函数 $y = xe^{-x}$ 的驻点是_____，拐点是

8、设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有导数，且在 x_0 处取得极值，则该函数在 x_0 处的导数 $f'(x_0) = -$

。

(五) 不定积分

1、已知 $f(x)$ 的一个原函数为 e^{-x} ，则 $f(x) =$ _____ .

2、若 $f'(x)$ 存在且连续，则 $[\int df(x)]' =$ _____ .

3、若 $\int f(x)dx = F(x) + c$ ，则 $\int e^{-x} f(e^{-x})dx =$ _____ .

4、若 $f(x)$ 连续，则 $(\int f(x)dx)' =$ _____ .

5、设 $f(x) = \cos x$ ，则 $f[\int_0^x f(t)dt] =$ _____；

6、 $\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}} dx =$ _____ .

7、 $\int \csc x (\csc x - \cot x) dx =$ _____ .

8、 $\int f(x)dx = 3e^{\frac{x}{3}} + C$ ，则 $f(x) =$ _____ .

9、 $\int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} dx =$ _____ .

10、 $\int e^{\cos x} \sin x dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

11、 $\int \arctan \frac{1}{x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

12、 $\int (tg^2 x - tgx) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

13、 $\int \frac{2-x^4}{1+x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

14、 $\int \frac{1}{10-6x+x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

15、若 $\int x f(x) dx = \sin e^{x^2} + C$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

16、 $\int \frac{1+x \ln x - x}{x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

(六) 定积分及应用

1、已知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $f(0) = 2$, 且设 $F(x) = \int_{\sin x}^{x^2} f(t) dt$, 则 $F'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

2、设 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - x - 1}{3x}, & x < 0 \\ \int_0^x \sin t^2 dt \cdot x^{-3}, & x > 0 \end{cases}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

3、已知 $f(2x) = xe^x$, 则 $\int_{-1}^1 |f(x)| dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

4、 $\int_{-a}^{+a} x[f(x) + f(-x)] dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

5、 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$, 其中 k 为常数, 当 $k \leq 1$ 时, 这积分 $\underline{\hspace{2cm}}$, 当 $k > 1$ 时, 这积分 $\underline{\hspace{2cm}}$, 当这积分收敛时, 其值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

6、设 $f(x)$ 连续, 且 $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(t) dt$ 则具体的 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

7、设 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^{x^3} f(t)dt = x$ ，则 $f(8) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

8、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

9、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

10、 $\int_{-1}^1 \sqrt{(1-x^2)^3} \sin^5 x dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

11、 $\int_{\frac{3}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

12、设 $f(2) = 4$ ， $\int_0^2 f(x)dx = 1$ ，则 $\int_0^2 xf'(x)dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

二、求极限

(一) 利用极限的四则运算法则求下列函数的极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 3x + 4) \quad (2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 1}{3x^2 - 6x + 5} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4}{x - 3}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} \quad (5) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3} \quad (6) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + 4x}{x^2 + 2x} \quad (8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \sqrt{1+x^2}} \quad (9) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$$

$$\begin{aligned}
(10) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{3x^2 + 4} & (11) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 5x + 1}{x^2 + 7x} & (12) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{1 + 2x^3}}{1 + x} \\
(13) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 6}{3x^2 + x + 3} & (14) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)}{n^2} & (15) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^{10} - 2)(3x + 1)^{20}}{(2x + 3)^{30}} \\
(16) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-2)^{10}(2x-3)^{20}}{(1-3x)^{30}} & (17) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) & (18) \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right) \\
(19) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}) & (20) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + (-1)^n}{n} \\
(21) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n \times (n+1)} \\
(22) \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} & (23) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x}{1 + x^2} & (24) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n + 2}{2n^2 + n - 5} \\
(25) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 1}{x^2 + x} & (26) \quad & \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{x - 4} & (27) \quad & \lim_{t \rightarrow -2} \frac{e^t + 1}{t} & (28) \quad & \\
& \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin 2x}{2 \cos(\pi - x)} & (29) \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}) \\
(30) \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1 - x^3} - \frac{1}{1 - x} \right)
\end{aligned}$$

(二) 利用第一重要极限公式求下列极限

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x} & (2) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} & (3) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 2 \sin x}{x + \sin x} \\
(4) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} & (5) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} & (6) \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1} \\
(7) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} & (8) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} & (9) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} \\
(10) \quad & \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} & (11) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x \sin x} & (12) \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 - 1} \\
(13) \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\sqrt{x} - 1)}{x - 1} & (14) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - x^2} - 1}{x \sin x} & (15) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 2x
\end{aligned}$$

$$(16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x} \quad (17) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin \frac{2}{x^2} \quad (18) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$$

$$(19) \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n}$$

(三) 利用第二重要极限公式求下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{-x} \quad (3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x^2)^{\frac{1}{x}} \quad (5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2-x}{2}\right)^{\frac{2}{x}-1} \quad (6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}} \quad (8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} \quad (9) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{x+1}$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{x}} \quad (11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+x)} \quad (12) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \tan^2 x)^{\cot x} \quad (14) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2} \quad (15) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+1}\right)^x$$

$$(16) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{x+3}\right)^{\frac{2}{x}} \quad (17) \lim_{n \rightarrow \infty} n(\ln(n+2) - \ln n)$$

$$(18) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{1+x}\right)^x \quad (19) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^x \quad (20) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1-3x}$$

$$(21) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{3 \sec x} \quad (22) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2 \sin x)^{\frac{1}{x}} \quad (23) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 4x)^{\frac{1-x}{x}}$$

(四) 利用罗必达法则求极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} \quad (5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} \quad (6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 5} \quad (8) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} \quad (9) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$$

$$\begin{aligned}
 (10) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \quad (11) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-4} - \sqrt{x}}{x-1} \quad (12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \\
 (13) \lim_{x \rightarrow +\infty} (3^x + 9^x)^{1/x} \quad (14) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2} \quad (15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{1 - \cos x} \\
 (16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} \quad (17) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x - \frac{\pi}{2}}{\operatorname{ctgx}} \quad (18) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \\
 (19) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} \quad (20) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) \quad (21) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} \quad (22) \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\tan x^3} \quad (23) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) \quad (24) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{\ln(1+x)} \\
 (25) \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x) \quad (26) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}
 \end{aligned}$$

三、求导数或微分

(一) 利用导数的基本运算公式和运算法则求导数

$$(1) y = x^4 - x + 1 \quad (2) y = \left(\frac{1}{x} + 2x \right) (x^3 - 2x^2)$$

$$(3) y = \frac{x-1}{x+1} \quad (4) y = x \ln x + \sin x - \cos x$$

$$(5) y = 3x^2 - 2x + 5 \quad (6) y = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} + 1$$

$$(7) y = x^3 + x^{-3} + 3^3 \quad (8) y = (x-1)(x-2)$$

$$(9) y = x^2 \ln x \quad (10) y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$(11) y = \frac{\sin x}{1 - \cos x} \quad (12) y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$$

$$(13) y = x \cos x + \sin x \quad (14) y = x \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$$

$$(15) y = x^a + a^x + a^a (a \text{ 为常数}) \quad (16) y = 2^x \ln x$$

$$(17) y = 2x^3 \sin x \quad (18) y = 3 \tan x - 4$$

$$(19) y = (3+2x)(2-3x)$$

$$(21) y = \frac{e^x}{x^2} + \frac{2}{x}$$

$$(20) y = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{\ln x}$$

$$(22) y = \frac{1 + \sin t}{1 + \cos t}$$

(二) 求复合函数的导数

$$(1) y = \sin x^2$$

$$(2) y = \ln \cos x$$

$$(3) y = \sqrt{1-x^2}$$

$$(4) y = \ln \operatorname{tg} x^2$$

$$(5) y = \ln(a^2 - x^2)$$

$$(6) y = \arcsin \frac{1}{x}$$

$$(7) y = \ln(1-x^2)$$

$$(8) y = \sin \ln x$$

$$(9) y = \cos(3x-5)$$

$$(10) y = \operatorname{tg} \frac{1}{x}$$

$$(11) y = e^{2x+1}$$

$$(12) y = (2x+5)^{10}$$

$$(13) y = \operatorname{arctg} x^2$$

$$(14) y = \arcsin \frac{x}{3}$$

$$(15) y = x^2 \sin x^2$$

$$(16) y = e^{-x} \cos x$$

$$(17) y = \sin x^2 + \sin^2 x$$

$$(18) y = \ln \operatorname{tg} 3x$$

$$(19) y = (\ln 2x)^3$$

$$(20) y = \sqrt{4-x^2}$$

$$(21) y = \cos \sqrt{x} + \ln \frac{1}{2x-1}$$

$$(22) y = 2^{\frac{1}{x}}$$

$$(23) y = \cos^3 x - \sin 3x$$

$$(24) y = 2^{\sin \frac{1}{x}} + x\sqrt{x}$$

$$(25) y = \sqrt{3-2x^2}$$

$$(26) y = e^{2x^3}$$

$$(27) y = \arcsin \sqrt{x}$$

$$(28) y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$$

$$(29) y = \ln \cos e^{-x^2}$$

$$(30) y = \arctan \frac{1}{x}$$

$$(31) y = e^{-\frac{x}{2}} \cos 2x$$

$$(32) y = \sin^n x \cos nx$$

$$(33) y = x^2 \sqrt{2 - \ln^2 x}$$

(三) 求由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 的导数

(1) $y^2 = 2x^2 + 1$

(2) $y = x \ln y$

(3) $y = 1 + xe^y$

(4) $\cos(xy) = x$

(5) $\sqrt{x} + \sqrt{y} - a = 0$

(6) $x^2 + y^2 - xy = 1$

(7) $y = x + \ln y$

(8) $x + \arctg y = y$

(9) $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$

(10) $xy^2 - 3y + 18x = 6$

(11) $\sin(xy) - \ln \frac{x+1}{y} = 1$

(12) $xy = e^{x+y}$

(13) $x^2 + xy = \arctan(xy)$

(14) $x^3 + y^3 - a = 0$ (a 为常数)

(四) 利用取对数求导法求下列函数的导数

(1) $y = \sqrt{\frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)}}$

(2) $y = (x+1)(x-2)^2(x+3)^3$

(3) $y = x^{\frac{1}{x}}$

(4) $y = \frac{x^2}{1-x} \cdot \sqrt{\frac{3-x}{3+x}}$

(5) $y = x \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

(五) 求下列函数的二阶导数

(1) $y = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 1$

(2) $y = x^2 \ln x$

(3) $y = e^{\sqrt{x}}$

(4) $y = \sin \frac{1}{x}$

(5) $y = \ln(x^2 - 1)$

(6) $y = e^{-x} \cos x$

(7) $y = e^x \sin x$

(8) $y = \cos e^x + \sin e^x$

(9) $f(x) = xe^{x^2}$

(10) $y = x\sqrt{1+x^2}$

(11) $y = \arctan x$

(12) $y = \sin^2(1+2x)$

(13) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

(14) $y = (1+x^2) \arctan x$

(六) 求下列函数的微分

(1) $y = 6x^5$

(2) $y = \sqrt{x^2 - 1}$

(3) $y = \ln x^2$

(4) $y = \frac{\sin x}{1 - x^2}$

(5) $y = \arccos \sqrt{x}$

(6) $y = e^{-x} \cos x$

(7) $y = \operatorname{tg}^2 x$

(8) $y = \operatorname{arctg} e^x$

(9) $y = \operatorname{arctg} x^2$

(10) $y = (x - 1)^2 (x - 2)^3$

(11) $y = (\sqrt{x} + 1) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right)$

(12) $y = \sqrt{x + e^x \sin x}$

(13) $f(x) = 2^x \cos x + \ln \frac{1-x}{1+x}$

(14) $\cos(x + y) + e^y = 1$

(15) $y = e^{\sin(3x+1)}$

(16) $y = e^{\cos \sqrt{2x}}$

(17) $\cos(x^2 + y) = x$

(18) $y = 2^{\sin \sqrt{x}}$

(19) $y = x^2 e^{2x}$

(20) $y = e^x \sin^2 x$

(21) $y = \ln \sqrt{1 - x^2}$

(22) $y = 1 + x e^y$

(23) $y^2 = x + \arccos y$

四、求不定积分

(一) 利用基本积分公式和积分的运算法则求不定积分

(1) $\int (2^x + x^4 + \sec^2 x) dx$

(2) $\int \left(\sin x - \frac{3}{1+x^2} \right) dx$

(3) $\int (2 - \sqrt[3]{x} + \sqrt{x}) x^2 dx$

(4) $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx$

(5) $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx$

(6) $\int \frac{(1-x)^3}{x^2} dx$

(7) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$

(8) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx$

$$\begin{array}{ll}
(9) \int \cos^2 \frac{x}{2} dx & (10) \int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx \\
(11) \int \sec x (\sec x - \operatorname{tg} x) dx & (12) \int \csc x (\csc x + \operatorname{ctg} x) dx \\
(13) \int 2^x \cdot e^x dx & (14) \int \frac{x-4}{\sqrt{x}+2} dx \\
(15) \int \frac{e^{2t}-1}{e^t-1} dt & (16) \int x \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}} dx \\
(17) \int \left(\frac{3}{1+x^2} - \frac{5}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx & (18) \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right) dx \\
(19) \int \frac{3x^2+1}{x^2(1+x^2)} dx & (20) \int e^x \left(2^x - \frac{e^{-x}}{1+x^2} \right) dx \\
(21) \int \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx & (22) \int x^3 (1-5x^2)^{10} dx \\
(23) \int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3} dx & (24) \int \frac{x+2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}}{x} dx \\
(25) \int \frac{(x^3-3)(x+1)}{x^2} dx & (26) \int \left(\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4} \right) dx \\
(27) \int \frac{3x^4+3x^2-1}{x^2+1} dx & (28) \int e^x \left(2^x + \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\
(29) \int \sin^2 \frac{x}{2} dx & (30) \int (10^x + x^{10}) dx
\end{array}$$

(二) 利用第一类换元积分法求不定积分

$$\begin{array}{ll}
(1) \int \sin(2x-5) dx & (2) \int e^{-3x} dx \\
(3) \int (x-3)^{\frac{3}{2}} dx & (4) \int \frac{1}{(2t-5)^2} dt \\
(5) \int x \sqrt{x^2-2} dx & (6) \int \sqrt{3x-7} dx \\
(7) \int \frac{2x}{1+x^2} dx & (8) \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx \\
(9) \int \frac{3x^2}{(2+x^3)^2} dx & (10) \int \frac{2x}{4+x^4} dx
\end{array}$$

$$(11) \int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx$$

$$(12) \int \frac{a^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$$

$$(13) \int \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$(14) \int \frac{(\ln x)^3}{x} dx$$

$$(15) \int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(16) \int \frac{\arctg x}{1+x^2} dx$$

$$(17) \int \operatorname{ctg} x dx$$

$$(18) \int \operatorname{csc} x dx$$

$$(19) \int \sin^3 x \cdot \cos x dx$$

$$(20) \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$$

$$(21) \int \sec 5x dx$$

$$(22) \int \frac{1}{(\arctg x)^2 \cdot (1+x^2)} dx$$

$$(23) \int a^{\cos x} \cdot \sin x dx$$

$$(24) \int \frac{\sin x}{(1+2\cos x)^2} dx$$

$$(25) \int (\sin 3x)^2 \cdot \cos 3x dx$$

$$(26) \int \frac{\sin x + \sin^2 x}{\sec x} dx$$

$$(27) \int (2x+1)\sqrt{x^2+x-2} dx$$

$$(28) \int \frac{2x-2}{x^2-2x+3} dx$$

$$(29) \int 5x^4 (2+x^5)^2 dx$$

$$(30) \int \frac{1}{x^2-2x+2} dx$$

$$(31) \int \left(\frac{1+\ln x}{x} + \sin 2x \right) dx$$

$$(32) \int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x} dx$$

$$(33) \int \frac{x}{x^2+5x+6} dx$$

$$(34) \int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx$$

$$(35) \int \frac{x - (\arctan x)^{\frac{3}{2}}}{1+x^2} dx$$

$$(36) \int \frac{1}{\sqrt[3]{2-3x}} dx$$

$$(37) \int \frac{x^2}{4+x^3} dx$$

$$(38) \int \frac{2+3\ln x}{x} dx$$

$$(39) \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$$

$$(40) \int \cos^5 x \sin x dx$$

$$(41) \int \tan(2x-5) dx$$

$$(42) \int \frac{a^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$$

$$(43) \int \frac{(\arctan x)^2}{1+x^2} dx$$

(三) 利用第二类换元积分法求不定积分

$$(1) \int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}} dx \quad (2) \int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+2}} dx$$

$$(3) \int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} dx \quad (4) \int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx$$

$$(5) \int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx \quad (6) \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx$$

$$(7) \int \frac{x}{\sqrt{x-3}} dx \quad (8) \int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} dx$$

$$(9) \int \frac{1}{\sqrt{1-2x}} dx \quad (10) \int \frac{1}{1+\sqrt{x-2}} dx$$

$$(11) \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (12) \int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}} dx$$

$$(13) \int \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} dx \quad (14) \int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$$

$$(15) \int \frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}} dx \quad (16) \int \sqrt{4-x^2} dx$$

$$(17) \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

(四) 利用分部积分法求不定积分

$$(1) \int x \cdot \cos x dx \quad (2) \int \ln x dx$$

$$(3) \int x^2 \arctg x dx \quad (4) \int x^2 \ln x dx$$

$$(5) \int \arcsin x dx \quad (6) \int x \cdot e^{-x} dx$$

$$(7) \int x^2 e^x dx \quad (8) \int \ln(x-1) dx$$

$$(9) \int x^{-1} \cdot \ln(\ln x) dx \quad (10) \int (x^2+1)e^x dx$$

$$(11) \int \ln(x+\sqrt{1+x^2}) dx \quad (12) \int \sin \sqrt{x} dx$$

$$(13) \int x e^{2x} dx$$

$$(14) \int x \ln x dx$$

$$(15) \int x \sin x dx$$

$$(16) \int x^2 \cos x dx$$

$$(17) \int \arctan x dx$$

$$(18) \int e^x \sin x dx$$

难题：

$$(1) \int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$$

$$(2) \int \frac{dx}{x \sqrt{\ln x (\ln x + 2)}}.$$

$$(3) \int e^{2x} \sin^2 x dx$$

$$(4) \int \frac{dx}{\sqrt{2e^{2x} + 2e^x + 1}}$$

$$(5) \int x^n \ln^n x dx$$

$$(6) \int \frac{dx}{1 + \sin x};$$

$$(7) \int \frac{\arctan e^x}{e^x} dx$$

$$(8) \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$(9) \int \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} dx$$

$$(10) \int \frac{2x}{\sqrt{9 + x^2}} dx$$

$$(11) \int \frac{dx}{1 + (2x - 3)^2}$$

$$(12) \int \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^3}} dx$$

$$(13) \int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1 - x^2}} dx$$

$$(14) \int \frac{\sec^2 x}{2 + \tan^2 x} dx$$

$$(15) \int x^2 e^{3x} dx$$

$$(16) \int (\ln x)^2 dx$$

$$(17) \int e^{\sqrt[3]{x}} dx$$

$$(18) \int \frac{1}{\sqrt{x}} \arcsin \sqrt{x} dx$$

$$(19) \int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$$

$$(20) \int \frac{x^2}{1 - x^4} dx$$

五、求定积分

(一) 求下列定积分

$$(1) \int_1^2 (2x^2 - 3x + 1) dx \quad (2) \int_0^1 (x + \sqrt{x}) dx$$

$$(3) \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} \quad (4) \int_0^3 e^{\frac{x}{3}} dx$$

$$(5) \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} \quad (6) \int_0^{2\pi} |\sin x| dx$$

$$(7) \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (8) \int_1^2 x^{\frac{3}{2}} dx$$

$$(9) \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx \quad (10) \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{4+x^2}$$

$$(11) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx \quad (12) \int_1^e \frac{1+5 \ln x}{x} dx$$

$$(13) \int_{-2}^3 |x^2 - 2x - 3| dx \quad (14) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sec^2 x - 1} dx$$

$$(15) \int_0^1 \sqrt{x} (1 + 2\sqrt{x})^2 dx \quad (16) \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$$

(二) 求下列定积分

$$(1) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{5-4x}} \quad (2) \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{t}} dt$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{3}} t g x dx \quad (4) \int_1^e \frac{2 + \ln x}{x} dx$$

$$(5) \int_1^5 \frac{\sqrt{u-1}}{u} du \quad (6) \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$(7) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cdot \cos x dx \quad (8) \int_{-2}^{-\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(9) \int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \quad (10) \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2} \cdot \sin \frac{1}{x} dx$$

$$(11) \int_{-2}^{-\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \quad (12) \int_0^{\pi} \sqrt{\sin \theta - \sin^3 \theta} d\theta$$

$$(13) \int_0^{\pi} \sqrt{1-\sin x} dx \quad (14) \int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{1+x}} dx$$

(三) 求下列定积分

$$(1) \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$$

$$(2) \int_0^1 x^2 \cdot e^x dx$$

$$(3) \int_1^e (\ln x)^2 dx$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \sin x dx$$

$$(5) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

$$(6) \int_0^{\sqrt{3}} 2x \cdot \arctg x dx$$

$$(7) \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$$

$$(8) \int_0^1 \ln(1+x^2) dx$$

$$(9) \int_1^e x \cdot \ln x dx$$

$$(10) \int_0^{\frac{1}{2}} \arccos x dx$$

$$(11) \int_0^2 x \cdot \ln(x+1) dx$$

$$(12) \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x^2} dx$$

$$(13) \int_0^1 x \cdot e^{\frac{x}{2}} dx$$

$$(14) \int_0^1 \ln(1+x) dx$$

$$(15) \int_0^1 x \cdot e^{2x} dx$$

$$(16) \int_1^e \sqrt{x} \ln x dx$$

(四) 求广义积分

$$(1) \int_0^{+\infty} e^{-x} dx$$

$$(2) \int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$(3) \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$$

$$(4) \int_{-\infty}^0 \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx$$

$$(5) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(6) \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$$

$$(7) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$(8) \int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$$

$$(9) \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1-x}$$

$$(10) \int_1^2 \frac{dx}{(1-x)^2}$$

六、定积分的应用

(一) 利用定积分求曲线所围成区域的面积

(1) 求曲线 $y = 2^x$, 直线 $x=0, x=3$ 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积;

(2) 求曲线 $y = \sin x$, $y = \cos x$ 和直线 $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$ 所围成的图形的面积;

(3) 求由曲线 $y = x^2$, 直线 $y = x$, $y = 2x$ 所围成的图形的面积;

(4) 求由曲线 $y^2 = 2x$ 与直线 $y = x - 4$ 所围成的图形面积;

(5) 求由曲线 $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$ 所围成的图形面积。

(6) 求由曲线 $y = x^3$ 与直线 $y = -x + 2$, $x = 0$ 围成的平面图形面积。

(7) 求由曲线 $y = x^2$ 与直线 $x + y = 2$ 围成的平面图形面积。

(8) 设平面图形由 $y = e^x$, $y = e$, $x = 0$ 围成, 求此平面图形的面积。

(9) 求由曲线 $y = x^2$ 与 $y = \sqrt{x}$ 所围成的图形的面积。

(二) 利用定积分求旋转体的体积

(1) 求由连续曲线 $y = \cos x$ 和直线 $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ 和 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转所成旋转体的

的体积;

(2) 求由曲线 $y = x^2$ 与 $y = \sqrt{x}$ 围成的图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积;

(3) 求由曲线 $y = x^3$, $x = 2$, $y = 0$, 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积;

(4) 求由曲线 $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$, 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积;

(5) 求由曲线 $y = x^2$, $y^2 = 8x$, 分别绕 x 轴、 y 轴旋转所得旋转体的体积。

七、计算题

(一) 求下列各数的近似值

(1) $\sqrt[3]{1.02}$ (2) $\sqrt[5]{0.95}$ (3) $\ln 1.03$ (4) $\sin 29^\circ$

(5) $\cos 60^\circ 20'$ (6) $\sqrt[3]{8.02}$ (7) $\lg 31^\circ$

(二) 求下列函数的增减区间

(1) $y = x^3 - 12x$ (2) $y = x - e^x - 1$

(3) $y = \arctg x - x$ (4) $y = \frac{x^2}{1+x}$

(5) $y = x^4 - 2x^2 + 2$ (6) $y = x^3 + x$

(7) $y = x - \ln(1+x^2)$ (8) $y = (1+x^2)e^{-x^2}$

(9) $y = x\sqrt{6-x}$ (10) $y = \ln(1+x^2)$

(11) $y = 2 - 3x^2 + x^3$

(三) 求下列函数的极值

(1) $y = x^4 - 2x^2$ (2) $y = x^2 e^{-x}$

(3) $y = x - \ln(1+x)$ (4) $y = x + \sqrt{1-x}$

(5) $y = x^2 \ln x$ (6) $y = 2 - (x-1)^{\frac{2}{3}}$

(7) $y = (x^2 - 1)^3 + 1$ (8) $y = x + \frac{1}{x}$

(9) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 15$ (10) $y = 2x^{\frac{2}{3}}(x-1)$

(11) $y = \frac{2}{3}x - (x-1)^{\frac{2}{3}}$ (12) $y = x^3 - 3x^2 + 7$

(13) $y = (x-3)^2(x-2)$ (14) $y = \sqrt{2+x-x^2}$

(15) $y = x^3 - 3x^2 + 5$ (16) $y = \arctan x - x$

(17) $y = 2x^2 - \ln x$ (18) $y = x^4 - 10x^2 + 8$

(四) 求下列函数的凹向与拐点

$$(1) y = x^4 - 2x^3 + 1 \quad (2) y = x^2 - x^3$$

$$(3) y = \ln(1 + x^2) \quad (4) y = xe^{-x}$$

$$(5) y = 3x^5 - 5x^3 \quad (6) y = (x-2)^{\frac{5}{3}}$$

$$(7) y = \sqrt{1+x^2} \quad (8) y = x + x^{\frac{5}{3}}$$

$$(9) y = x^3 - 2x^2 + x + 5 \quad (10) y = x + \frac{x}{x-1}$$

(五) 求下列函数的最值

$$(1) y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2 \text{ 在区间 } [-1, 1]$$

$$(2) y = x^2 e^{-x} \text{ 在区间 } [-1, 3]$$

$$(3) y = \frac{x^2}{1+x} \quad \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$(4) y = x^3 - x^2 - x + 1, \quad [-1, 2]$$

$$(5) y = x + \frac{1}{x}, \quad \left[\frac{1}{2}, 2\right]$$

$$(6) y = x + 2\sqrt{x}, \quad [0, 4]$$

八、多元函数的微积分：

(一) 求下列函数的偏导数：

$$(1) z = x^3 y - xy^3 \quad (2) z = \sqrt{\ln(xy)}$$

$$(3) z = \arcsin(xy) + \cos^2(xy) \quad (4) z = (1 + xy)^y$$

$$(5) z = \arctan \frac{y}{x} \quad (6) z = y^x$$

$$(7) z = \frac{y}{x}$$

(二) 求下列函数的全微分：

$$(1) \quad z = xy + \frac{x}{y} \quad (2) \quad z = e^{x-2y}$$

$$(3) \quad z = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (4) \quad u = x^{yz}$$

$$(5) \quad z = x^2 \ln(xy) \quad (6) \quad z = \frac{1}{x^2 - y^2}$$

$$(7) \quad z = \ln(1 + x^2 + y^2) \quad (8) \quad z = \frac{y}{x}$$

(三) 求下列函数的偏导数和微分：

$$(1) \quad \text{设 } z = u^2 \ln v \text{ 而 } u = \frac{x}{y}, v = 3x - 2y \quad \text{求 } \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}.$$

$$(2) \quad \text{设 } z = e^{x-2y}, \text{ 而 } x = \sin t, y = t^3, \text{ 求 } dz.$$

$$(3) \quad \text{设 } z = \arctan(xy), \text{ 而 } y = e^x, \text{ 求 } \frac{dz}{dx}.$$

$$(4) \quad \text{设 } u = \frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}, \text{ 而 } y = a \sin x, z = \cos x, \text{ 求 } \frac{du}{dx}.$$

(四) 设下列方程所确定的函数为 $y = f(x)$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

$$(1) \quad xy - \ln y = 0 \quad (2) \quad \sin y + e^x - xy^2 = 0$$

$$(3) \quad xy + \ln x + \ln y = 0$$

(五) 对下列隐函数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial x}{\partial y}$ 及 dz .

$$(1) \quad x + 2y + z - 2\sqrt{xyz} = 0$$

$$(2) \quad e^z - xyz = 0 \quad (3) \quad \frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$$

(六) 1、设 $z^3 - 3xyz = a^3$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

$$2、\text{设 } e^x - xyz = 0, \text{ 求 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

十二、计算下列二重积分：

$$(1) \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma, \quad \text{其中 } D \text{ 是矩形区域: } |x| \leq 1, |y| \leq 1;$$

$$(2) \iint_D (x^2 + y^2 - x) d\sigma, \quad \text{其中 } D \text{ 由直线 } y=2, y=x \text{ 与 } y=2x \text{ 所围成};$$

$$(3) \iint_D xy^2 d\sigma, \quad \text{其中 } D \text{ 由抛物线 } y=x^2 \text{ 和直线 } y=x \text{ 所围成};$$

$$(4) \int_1^2 dy \int_{\sqrt{y-1}}^1 \frac{\sin x}{x} dx.$$

$$(5) \int_1^5 dy \int_y^5 \frac{dx}{y \ln x}$$

$$(6) \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$(7) \int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^x \sin \frac{\pi x}{2y} dy + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 \sin \frac{\pi x}{2y} dy$$

$$(8) \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx$$

$$(9) \iint_D y dx dy, \quad \text{其中 } D \text{ 是由直线 } y=x, y=x-1, y=0 \text{ 及 } y=1 \text{ 及所围成的平面区域}.$$

域。

九、判断与证明

(一) 求下列函数的间断点, 并指出间断点的类型. 若是可去间断点, 则补充定义, 使其在该点连续.

$$(1) f(x) = \frac{x^2 - x}{|x|(x^2 - 1)}$$

$$(2) f(x) = \frac{1}{\ln(2x-1)}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x}, & x \leq -1 \\ 2+x, & -1 < x \leq 0 \\ x \sin \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$(4) f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$(5) y = \frac{1}{(x-2)^2}$$

$$(6) y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$$

$$(7) y = \begin{cases} \frac{1-x^2}{1+x} & x \neq -1 \\ 0 & x = -1 \end{cases}$$

$$(8) y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ e^{-x} & x < 0 \end{cases}$$

$$(9) f(x) = \begin{cases} x+1 \\ 0 \\ x-1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \nearrow < \circ \\ \leftarrow < \circ \\ \searrow > \circ \\ \leftarrow > \circ \end{matrix} \quad (10) f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$(11) f(x) = \frac{x}{\tan x}$$

(二) 利用连续函数的定义，证明下列函数在 $x=0$ 点的连续性。

$$(1) f(x) = 1 + \sqrt{1-x^2} \quad (2) f(x) = \frac{x+1}{2x^2-1}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (4) f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan x}{x}, & -1 < x < 0 \\ 1-x, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

(三) 判断下列函数在给定的区间上是否满足罗尔定理的条件。如满足，求出定理中的 ξ ；如不满足，说明原因。

$$(1) f(x) = x^2 + 2x - 1 \quad [-2, 0]$$

$$(2) f(x) = \ln \sin x \quad \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right]$$

$$(3) f(x) = 2x^2 - x - 3 \quad \left[-1, \frac{3}{2} \right]$$

(四) 验证下列函数在给定的区间上是否满足拉格朗日定理的条件。如满足，求出定理中的 ξ ；如不满足，说明原因。

$$(1) f(x) = \ln x \quad [-2, 0]$$

$$(2) f(x) = \arctg x \quad \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right]$$

$$(3) f(x) = \ln x \quad [1, 2]$$

(五) 证明：

(1) 证明方程 $x^4 - 3x^2 + 7x - 10 = 0$ 在 1 与 2 之间至少有一个实根；

(2) 证明方程 $x \cdot 2^x = 1$ 至少有一个小于 1 的正根。

(3) 证明方程 $x^5 - 3x = 1$ 在 (1, 2) 内至少存在一个实根；

(4) 方程 $x = a \sin x + b$ ，其中 $a > 0, b > 0$ ，至少有一个正根，并且它不超过 $a + b$ 。

(5) 证明方程 $x^3 - 3x = 1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间。

(6) 证明方程 $x^5 + 10x + 3 = 0$ 有且只有一个实根。

(六) 证明不等式：

(1) $x > \ln(1 + x)$ ($x > 0$)

(2) 当 $x > 1$ 时, 有 $e^x > ex$

(3) 当 $x > 0$ 时, $e^x > 1 + x$

(4) 当 $x > 0$ 时, $\cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2$

(七) 证明等式：

(1) $2 \arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi$ ($x \geq 1$).

(八) 证明：当 $x \rightarrow 0$ 时，

(1) $e^x - 1 \sim x$ ； (2) $\arcsin x \sim x$ 。

九：应用题

1. 设某产品的价格与销售量的关系为 $p = 10 - \frac{Q}{5}$.

(1) 求当需求量为 20 及 30 时的总收益 R 、平均收益 $\bar{R}$ 及边际收益 R' .

(2) 当 Q 为多少时,总收益最大?

2. 设某商品的需求量 Q 对价格 P 的函数为 $Q = 50000e^{-2P}$.

(1) 求需求弹性;

(2) 当商品的价格 $P = 10$ 元时,再增加 1%, 求商品需求量的变化情况.

3. 某食品加工厂生产某类食品的成本 C (元) 是日产量 x (公斤) 的函数

$$C(x) = 1600 + 4.5x + 0.01x^2$$

问该产品每天生产多少公斤时, 才能使平均成本达到最小值?

4. 某化肥厂生产某类化肥, 其总成本函数为

$$C(x) = 1000 + 60x - 0.3x^2 + 0.001x^3 \quad (\text{元})$$

销售该产品的需求函数为 $x = 800 - \frac{20}{3}p$ (吨), 问销售量为多少时, 可获最大利润, 此时的价格为多少?

5. 某商店每年销售某种商品 a 件, 每次购进的手续费为 b 元, 而每年库存费为 c 元, 在该商品均匀销售的情况下(此时商品的平均库存数为批量的一半), 问商店分几批购进此种商品, 方能使手续费及库存费之和最少?

6. 生产某种产品的固定成本为 1 万元, 每生产一个该产品所需费用为 20 元, 若该产品出售的单价为 30 元, 试求:

(1) 生产 x 件该种产品的总成本和平均成本;

(2) 售出 x 件该种产品的总收入;

(3) 若生产的产品都能够售出, 则生产 x 件该种产品的利润是多少?

7. 某厂生产某种商品 q 千件的边际成本为 $C'(q) = q + 36$ (万元/千件), 其固定成本是 9800 (万元). 求 (1) 产量为多少时能使平均成本最低? (2) 最低平均成本是多少?

8. 已知某产品的边际成本为 $C'(q) = 4q$ (万元/百台), 边际收入为 $R'(q) = 60 - 12q$ (万元/百台). 如果该产品的固定成本为 10 万元, 求: (1) 产量为多少时总利润 $L(q)$ 最大? (2) 从最大利润产量的基础上再增产 200 台, 总利润会发生什么变化?

9. 生产某种产品 q 吨时的边际成本函数为 $C'(q) = 2 + q$ (万元/吨), 收入函数为 $R(q) = 12q - q^2/2$ (万元), 如果最大利润为 15 万元, 求成本函数。

10. 某商品总成本函数为 $C(q) = 100 + 4q^2$, q 为产量, 求产量为多少时, 平均成本最小?

11. 某厂生产某种商品 q 件时的总成本函数为 $C(q) = 20 + 4q + 0.01q^2$ (元), 单位销售价格为 $p = 14 - 0.01q$ (元/件), 问产量为多少时可使利润达到最大? 最大利润是多少。

12. 要做一个底为长方形的带盖的箱子, 其体积为 72cm^3 , 底长与宽的比为 $2:1$, 问各边长多少时, 才能使表面积为最小?

13. 要做一个容积为 250π 立方米的无盖圆柱体蓄水池, 已知池底单位造价为池壁单位造价的两倍, 问蓄水池的尺寸应怎样设计, 才能使总造价最低?

14. 要做一底面为长方形的带盖的箱子, 其体积为 72 立方厘米, 两底边之比为 $2:1$, 问边长为多少时用料最省?

十、解答题:

(一) 求函数的定义域:

(1) 若 $f(x)$ 的定义域是 $[-4, 4]$, 求 $f(x^2)$ 的定义域

(2) 若 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 3a]$ ($a > 0$), 求 $f(x+a) + f(x-a)$ 的定义域;

(3) 若 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 求 $f(\lg x)$ 的定义域;

(4) 若 $f(1-x)$ 的定义域是 $[-1, 1]$, 求 $f(x)$ 的定义域

(5) 求下列二元函数的定义域并作出图形:

$$(1) z = \ln(y^2 - 2x + 1) \quad (2) z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$$

$$(3) z = \frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)} \quad (4) z = \sqrt{x-\sqrt{y}}$$

(二) 关于极限:

1、设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 2 \\ 2x + k, & x < 2 \end{cases}$, 问当 k 取何值时, 函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow 2$ 时的极限存在.

2、求 $f(x) = \frac{x}{x}, \varphi(x) = \frac{|x|}{x}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时的左、右极限, 并说明它们在 $x \rightarrow 0$ 时的极限是否存在.

3、设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2}{x - 1} - ax + b \right) = -5$, 求常数 a, b 的值.

4、若常数 k 使 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + kx + k + 3}{x^2 + x - 2}$ 存在, 试求出常数 k 与极限值.

5、当 $x \rightarrow 0$ 时, 指出关于 x 的同阶无穷小量、高阶的无穷小量、等价的无穷小量.

$$\sqrt{1+x} - 1, \sin^2 x, \cos x - 1, \frac{1}{2}(e^{2x} - 1), \sin x^2.$$

6、已知 $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b, & 0 < x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ \ln(bx + 1), & 1 < x \leq 3 \end{cases}$, 问当 a, b 为何值时, $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

7、求函数 $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 + x - 6}$ 的连续区间, 并求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 2} f(x), \lim_{x \rightarrow -3} f(x)$.

8、设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{2x}, & x < 0 \\ (1+ax)^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$, 试求 a , 使得 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在.

(三) 导数和微分

1、讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性和可导性：

(1) $y = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ (2) $y = |\cos x|$

(3) $y = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

2、设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ ax+b, & x > 1 \end{cases}$, 为使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且可导, a, b 应取什么值?

3、求曲线 $y = x^2$ 在点 $(-1, 1)$ 处的切线方程.

4、求曲线 $y = \sin x + x^2$ 上横坐标为 $x=0$ 的点处的切线方程和法线方程.

5、求曲线 $y^2 - \ln x + (x-e) \cot \frac{\pi y}{2} = 0$ 在点 $(e, 1)$ 处的切线方程.

6、设 $x^3 + y^3 + e^{-x} = 0$, 求 $y''(0)$.

7、设曲线 $f(x) = x^3 + ax$ 与 $g(x) = bx^2 + c$ 都经过点 $(-1, 0)$, 且在 $(-1, 0)$ 有公共切线, 求常数 a, b, c .

8、设 $y = a^x + x^a + x^x + a^a$ (a 为常数), 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$

(四) 微分中值定理

1、设 $\lim_{x \rightarrow 0} (x^{-3} \sin 3x + ax^{-2} + b) = 0$, 试确定常数 a, b 的值.

2、 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ 的极限存在吗? 可否应用罗必达法则.

3、设 $f(x) = \begin{cases} (\tan x)^{\ln(1-x)}, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 证明函数 $f(x)$ 在 $x=0$

处右连续.

综合练习 (一)

一、单项选择题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. 设 $f(x) = x \sin x$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内为 ().
A. 周期函数 B. 偶函数
C. 单调函数 D. 有界函数
2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt{x+1} - 1$ 是关于 x 的 ().
A. 高阶无穷小 B. 低阶无穷小
C. 同阶但不等价无穷小 D. 等价无穷小
3. 在 $[-1, 1]$ 上满足拉格朗日中值定理的函数是 ().
A. $y = e^{-x^2}$ B. $y = \sqrt[3]{x^2}$
C. $y = \frac{1}{1-x^2}$ D. $y = \frac{\sin x}{x}$
4. 设平面图形 $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$, 则 D 绕 x 轴旋转一周生成的旋转体体积等于 ().
A. $\pi \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]^2 dx$ B. $\pi \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]^2 dx$
C. $\pi \int_a^b \{[f_2(x)]^2 - [f_1(x)]^2\} dx$ D. $\pi \int_a^b \{[f_1(x)]^2 - [f_2(x)]^2\} dx$
5. 设 $f(x+y, xy) = x^2 + y^2$, 则 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = ()$.
A. $2x - 2$ B. $2x + 2$
C. $2x + 2y$ D. $2x - 2y$

二、填空题 (每小题 4 分, 共 28 分)

1. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x}\right)^x = e^k$, 则 $k =$ _____.

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{x}, & x > 0 \\ x-a, & x \leq 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 连续, 则 $a =$ _____.

3. 曲线 $y = xe^{-x}$ 的拐点坐标是 _____.

4. 设 $z = \ln(x+y)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____ .
5. 设 $f(x)$ 的原函数是 x^3 , 则 $\int x f(2-x^2) dx =$ _____ .
6. 更换积分次序, $\int_0^1 dy \int_{y^2}^1 f(x,y) dx =$ _____ .
7. 微分方程 $\frac{dy}{dx} = x^2 y$ 满足初始条件 $y(0) = 2$ 的特解是 _____ .

三、解答题 (共 52 分)

1. (本题 5 分) 试证: 当 $x > 0$ 时, 不等式 $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x)$ 成立 .
2. (本题 7 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \cos x}{\sin x}$.
3. (本题 7 分) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $z^3 - 2xz + y = 0$ 确定, 求 dz .
4. (本题 7 分) 求微分方程 $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = \frac{1}{1+x}$ 的通解 .
5. (本题 8 分) 求函数 $y = x\sqrt{2-x}$ 的极值 .
6. (本题 9 分) 计算 $\int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} dx$.
7. (本题 9 分) 计算 $\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy$, 其中 D 是由 $x^2 + y^2 \leq 1$ 所确定的区域 .

高等数学 样卷参考答案

一、单项选择题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. 选 B

分析: A 不正确. 因为对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, 使 $(x+T)\sin(x+T) = x\sin x$ 的正数 T 不存在, 根据周期函数的定义, 知 $y = x\sin x$ 不是周期函数.

C 不正确. 因为 $y' = \sin x + x \cos x$, 至少有 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $y' > 0$, y 单调增; $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ 时, $y' < 0$, y 单调减, 所以 $y = x \sin x$ 不是单调函数.

D 不正确. 当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时, $y = x \sin x$ 中的 $|x|$ 可以任意大, 因此 $y = x \sin x$ 无界.

由于 $f(-x) = (-x) \sin(-x) = (-x)(-\sin x) = x \sin x = f(x)$, 故知 $y = x \sin x$ 是偶函数.

2. 选 C

分析: 根据无穷小阶的比较的概念, 只需计算比的极限.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{2}$$

3. 选 A

分析: B 中函数 $y = \sqrt[3]{x^2}$ 是初等函数, 在 $[-1, 1]$ 有定义, 从而连续, 但 $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ 在 $y = e^{x^2}$ 不存在, $y = \sqrt[3]{x^2}$ 不满足定理的第二个条件.

C 中函数 $y = \frac{1}{1-x^2}$ 在 $x = -1$ 与 $x = 1$ 处无定义, 它在 $[-1, 1]$ 不连续, 不满足定理的第一个条件.

D 中函数 $y = \frac{\sin x}{x}$ 在 $x = 0 \in (-1, 1)$ 间断, 不满足定理的第一个条件.

A 中函数 $y = e^{x^2}$ 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 故在 $[-1, 1]$ 上连续, $y' = 2xe^{x^2}$ 在 $(-1, 1)$ 存在, 在 $(-1, 1)$ $f_1(x) \leq f_2(x)$ 可导, 因此 $y = e^{x^2}$ 在 $[-1, 1]$ 上满足定理.

4. 选 C

分析: 根据旋转体体积的计算公式, 曲边梯形 $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ 绕 x 轴旋转一周的旋转体体积 $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$, 本题中所给 D 不是以 $[a, b]$ 为底的曲边梯形, 而是曲边梯形 $\{(x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f_2(x)\}$ 中除去曲边梯形 $\{(x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f_1(x)\}$ 的部分, 故所求为两旋转体体积之差, 因此应该为平方之差, 而不能是差的平方, 所以 A, B 不对, 由题设 $f_1(x) \leq f_2(x)$, 所以应为 $[f_2(x)]^2$ 与 $[f_1(x)]^2$ 之差, 即选 C 正确.

5. 选 A

分析: 已知条件中未给定 $f(x, y)$ 的表达式, 为求两个偏导数, 应先求出 $f(x, y)$ 的表达式, $f(x+y, xy) = x^2 + y^2$ 应理解为: 在 $f(x, y)$ 的解析式中, 用 $x+y$ 替换 x , 用 xy 替换 y 后得 $x^2 + y^2$,

于是,若能将 $x^2 + y^2$ 用 $x+y$, xy 表示,再将 $x+y$ 还原为 x , xy 还原为 y ,则可得 $f(x,y)$ 的表达式.

因为 $f(x+y, xy) = x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2xy - 2xy = (x+y)^2 - 2xy$, 所以 $f(x,y) = x^2 - 2y$, 于是

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2x - 2$$

二、填空题 (每小题 4 分, 共 28 分)

1. 填 -2

分析: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x = e^{-2}$, 由 $e^{-2} = e^k$, 得: $k = -2$

2. 填 -3

分析: 函数在一点处连续的必要条件是极限存在, 而对分段函数来说, 在分段点处极限存在的一个充分必要条件是左、右极限存在且相等, 由此构造含参数 a 的方程, 进而解出 a

值. $f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 3x}{x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 3x}{3x} = 3$

$f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-a) = -a$

由 $-a = 3$, 知 $a = -3$

3. 填 $(2, \frac{2}{e^2})$

分析: 根据判定拐点的必要条件和充分条件, 应求出二阶导数.

$y' = e^{-x} + xe^{-x}(-1) = e^{-x} - xe^{-x}$

$y'' = -e^{-x} - e^{-x} - xe^{-x}(-1) = 2e^{-x} + xe^{-x} = (x-2)e^{-x}$

令 $y'' = 0$, 由 $x-2 = 0$, 得 $x = 2$

又当 $x < 2$ 时, $y'' < 0$; $x > 2$ 时, $y'' > 0$, 所以曲线上横坐标为 2 的点为拐点, 将 $x = 2$ 代入

曲线方程 $y = xe^{-x}$ 中, 得 $y = 2 \cdot e^{-2} = \frac{2}{e^2}$, 故拐点坐标为 $(2, \frac{2}{e^2})$.

4. 填 $-\frac{1}{(x+y)^2}$

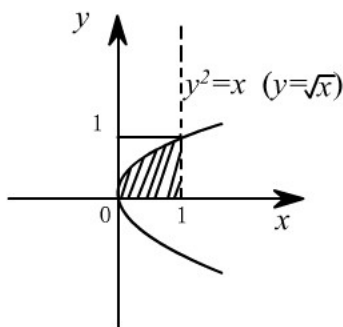
分析: 依高阶偏导法则计算 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x+y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{(x+y)^2}$

5. 填 $-\frac{1}{2}(1-x^2)^3 + C$

分析：由题设，应有 $\int f(x)dx = x^3 + C$ ，若能将待求积分化为 $\int f(x)dx$ ，则可得结果。根据第一换元法， $\int xf(1-x^2)dx = -\frac{1}{2}\int f(1-x^2)d(1-x^2)$ 所以 $\int xf(1-x^2)dx = -\frac{1}{2}(1-x^2)^3 + C$

6.

分析：



由已知二次积分知： $0 \leq y \leq 1$ ， $y^2 \leq x \leq 1$ ，从而 $\iint_D f(x,y)dxdy$ 的积分区域如图中阴影所示，
 更换积分次序时，将 D 表为： $0 \leq x \leq 1$ ， $0 \leq y \leq \sqrt{x}$ ，所以

$$\int_0^1 dy \int_{y^2}^1 f(x,y)dx = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$$

7. 填 $y = 2e^{\frac{1}{3}x^3}$

分析：所给方程为变量可分离方程，分离变量，有 $\frac{dy}{y} = x^2 dx$

两边积分： $\int \frac{dy}{y} = \int x^2 dx$

$$\ln y = \frac{1}{3}x^3 + C$$

由初始条件知 $\ln 2 = C$ ，将 $C = \ln 2$ 代回，得： $\ln y = \frac{1}{3}x^3 + \ln 2$ ，即 $y = 2e^{\frac{1}{3}x^3}$

三、解答题（共 52 分）

1. (本题5分) 证: 只须证 $x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x) < 0$

设 $f(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$

在 $x=0$ 处, $f(0) = 0$

又 $f'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} = \frac{(1-x)(1+x)-1}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x}$

当 $x > 0$ 时, 由 $1+x > 0, -x^2 < 0$ 知 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调减, 所以

$f(x) < f(0)$ 即 $x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x) < 0$, 移项, 得 $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x)$

故当 $x > 0$ 时, 不等式 $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x)$ 成立.

2. (本题7分) 解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \cos x}{\sin x} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} + \sin x}{\cos x} = 2$

3. (本题7分) 解: 设 $F(x, y, z) = z^3 - 2xz + y$

$F'_x = -2z$, $F'_y = 1$, $F'_z = 3z^2 - 2x$

$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{-2z}{3z^2 - 2x} = \frac{2z}{3z^2 - 2x}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{1}{3z^2 - 2x}$

所以 $dz = \frac{1}{3z^2 - 2x}(2zdx - dy)$

4. (本题7分) 解: $P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = \frac{1}{1+x}$

$\int P(x)dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln x$

$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int \frac{1}{1+x}e^{\ln x}dx = \int \frac{x+1-1}{1+x}dx = \int (1 - \frac{1}{1+x})dx = x - \ln(1+x)$

$y = e^{-\int P(x)dx}(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C) = e^{-\ln x}[x - \ln(1+x) + C] = \frac{1}{x}[x - \ln(1+x) + C]$

所以原方程通解为: $y = 1 - \frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{C}{x}$

5. (本题8分) 解: 定义域为 $(-\infty, 2]$

$y' = \sqrt{2-x} + x \cdot \frac{-1}{2\sqrt{2-x}} = \frac{2(2-x)-x}{2\sqrt{2-x}} = \frac{4-3x}{2\sqrt{2-x}}$

令 $y' = 0$ 由 $4 - 3x = 0$ 得驻点 $x = \frac{4}{3}$

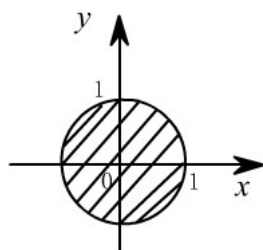
当 $\frac{4}{3} < x < 2$ 时, $y' < 0$; 当 $-\infty < x < \frac{4}{3}$ 时, $y' > 0$, 所以 y 在 $x = \frac{4}{3}$ 取极大值.

$$\text{所以 } y_{\text{极大}} = y\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} \sqrt{2 - \frac{4}{3}} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{4}{9} \sqrt{6}$$

6. (本题9分) 解: 令 $\sqrt{x} = t, x = t^2, dx = 2t dt$ 且 t 从 $0 \rightarrow \pi$ 时, x 从 $0 \rightarrow \pi^2$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} dx &= \int_0^{\pi} \sin t \cdot 2t dt = 2 \int_0^{\pi} t d(-\cos t) = -2t \cos t \Big|_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} -\cos t dt \\ &= -2\pi \cos \pi + 2 \cdot 0 \cdot \cos 0 + 2 \sin t \Big|_0^{\pi} = 2\pi \end{aligned}$$

7. (本题9分) 解:



D 的图形如阴影部分, 在极坐标系下,

$$D = \{(r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1\}$$

$$\begin{aligned} &\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 e^{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} r dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r e^{r^2} dr \\ &= \theta \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 e^{r^2} dr^2 \\ &= \pi e^{r^2} \Big|_0^1 \\ &= \pi(e-1) \end{aligned}$$

1994~1995(下)高等数学试题

一、设 $z = \sqrt{y} + f(\sqrt[3]{x} - 1)$ 且当 $y = 1$ 时, $z = x$, 求函数 z 的解析表达式。(6分)

二、设 $z = x \arctan(xy)$, 求 $z_x|_{(1,1)}$; $z_y|_{(1,1)}$; $\text{grad} z|_{(1,1)}$ (9分)

三、求曲面 $e^z - z + xy = 3$ 在点 $M(2,1,0)$ 处的切平面方程和法线方程。(9分)

四、设 $I = \iiint_{\Omega} f(x^2 + y^2) dx dy dz$, 其中 Ω 是曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 围成的空间区域。(1)将三重积分 I 化为球坐标系下的三次积分(不作计算) ,(2)将三重积分 I 化为柱坐标系下的三次积分 (不作计算) (9 分)

五、计 算 曲 线 积 分 $I = \oint_C (x^2 + y^2) dx + (x + 2) dy$, 其 中 C 是 以 $O(0,0), A(1,0), B(0,1)$ 为顶点的三角形的正向。 (9 分)

六、求微分方程 $y' = \frac{y}{x + y}$ 的通解。

七、求微分方程 $y'' + 2y' - 3y = 1 + e^x$ 的通解。 (9 分)

八、计算 $\iint_D \tan(1-x)^2 dx dy$ 。其中 D 为 $x=0, x=y, y=1$ 所围成的区域。（9分）

九、设 $z = x\varphi(y^2, xy)$ ，其中 φ 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。（10分）

十、将 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 展开成 $(x+2)$ 的幂级数。（10分）

十一、计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} xzdydz + z^2dxdy$,其中 Σ 是旋转抛物面 $z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 1)$ 的外侧。

(10 分)

1995~1996(下)高等数学试题

一、设 $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$, 其中 f 是任意的二次可微函数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 。

二、求一曲线方程, 这曲线通过原点, 且它的每一点处的切线斜率等于 $2x + y$ 。

三、求曲面 $3x^2 + y^2 - z^2 = 3$ 在点 A (1,1,1) 处的切平面和法线方程。

四、计算曲线积分 $I = \oint_L (x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$, 其中 L 是以点 $O(0,0), A(2,1), B(2,4)$ 为顶点的三角形周界的正向。

五、研究函数 $z = 1 - (x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}$ 的最值。

六、计算二重积分 $I = \iint_D [e^{x^2} + \cos(1 - y)^2] dx dy$, 其中 D 是 $y = x, y = 0, x = 1$ 由围

成的区域。

七、计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} xdydz + xz^2dzdx + z^2dxdy$ ，其中 Σ 是由抛物面 $z = x^2 + y^2$ 和

平面 $z = 1$ 所围成的区域的边界曲面的外侧。

八、求微分方程： $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$ 的通解。

九、将 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 展开成 $(x+2)$ 的幂级数。

十、设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，求证 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛。

1996~1997(下)高等数学试题

一、设 $z = x \arctan(xy^2)$ ，试求 z 关于 x, y 的微分 dz 。（5分）

二、判断级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + 3^n}{4^n}$ 的敛散性。 (5 分)

三、设 $z = x\varphi(xy, y^2)$, 其中 φ 具有二阶连续偏导数 , 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。 (10 分)

四、求曲面 $3x^2 + y^2 - z^2 = 3z$ 在点 $M(1,1,1)$ 处的切平面和法线方程。 (10 分)

五、计算二重积分 $I = \iint_D [e^{y^2} + \cos(1-x)^2] dx dy$, 其中 D 是 $y = x, x = 0, y = 1$ 由围成的区

域。 (10 分)

六、求曲线积分 $\oint_L (2x - y + 4)dx + (5y + 3x - 6)dy$, 其中 : L 为三顶点

$O(0,0), A(3,0), B(3,2)$ 分别为的三角形的正向边界。 (10 分)

七、算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} x dy dz + x z^2 dz dx + z^2 dx dy$, 其中 Σ 是由抛物面 $z = x^2 + y^2$ 和平面

$z = 1$ 所围成的区域的边界曲面的外侧。 (10 分)

八、将函数 $f(x) = \frac{1}{(2-x)^2}$ 在收敛区间内展开成 x 的幂级数。 (10 分)

九、设 $f(x)$ 可微， $f(0) = 1$ 且曲线积分 $\oint_L [2f(x) + e^{2x}]ydx + f(x)dy$ 与路径无关。求 $f(x)$ 。 (10 分)

十、设 $I = \iiint_{\Omega} f(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ ， Ω 为抛物面 $z = x^2 + y^2$ 及锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围成的闭区域。试将三重积分 I 分别化为直角坐标系、柱面坐标系、球面坐标系下的三重积分。(不作计算) (10 分)

十一、求微分方程 $y'' + 2y' - 3y = 2e^x - 1$ 的通解。 (10 分)

1997~1998(下)高等数学试题 (A)

一、试解下列各题。(每题5分,共50分)。

1. 求过点(1,1,1)且与平面 $x+y+z=1$ 平行的平面方程。

2. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,问(1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+50}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$ 是否收敛?为什么?

3. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$ 的敛散性。

4. 求函数 $z = (x^4 + 2x^2y^2 + y^4)/(1 - x^2 - y^2)$ 在圆周 $x^2 + y^2 = R^2$ 上的点的值。

5. 计算 $\int_3^4 dx \int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2} dy$ 。

6. 求方程 $y' = (1 + y^2)/(1 + x^2)$ 满足 $y(0) = 1$ 的特解。

7. 已知 $f(x)$ 可微, 且 $u = f(ax + by + cz)$, 求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 。

8. 已知球面中心在 $(3, -5, -2)$, 且球面与平面 $2x - y - 3z + 11 = 0$ 相切, 求球面的方程。

9. 计算 $\int_L x dx$, 其中 L 为由 $A(1, -1)$ 经 $y^2 = x$ 到 $B(1, 1)$ 的一段弧。

10 . 设函数 $u = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}$, 求偏导数 $\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{(0,0,\pi/4)}$ 。

二、计算二重积分 $\iint_D y dx dy$, 其中 D 为 $y = \sqrt{2a^2 - x^2}$ 与 $y = \frac{x^2}{a}$ 所围成的区域。

(本题 10 分)

三、 (本题 10 分)

将函数 $\frac{1}{x}$ 展成 $(x - x_0)$ 的幂级数 (其中 $x_0 \neq 0$) , 并指明收敛范围。

四、(本题 10 分)

求马鞍面 $z = xy$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切平面与三坐标面所围成的四面体的体积。

五、(本题 10 分)

求方程 $y'' - 7y' + 12y = -e^{4x}$ 的通解。

六、(本题 10 分)

已知曲线积分 $I = \oint_C y^3 dx + (3x - x^3) dy$, 其中 C 为 $x^2 + y^2 = R^2 (R > 0)$ 的逆时针方向。

(1) 为 $R = ?$ 时使 $I = 0$

(2) 问 $R = ?$ 时使 I 取得最大值 , 并求最大值。

1998---1999（下）高等数学试卷（A）

一、（18分）试求下列函数偏导数全微分。

1、（6分）设 $z = x^y$ ，求 dz 。

2、（6分）设 $z = f(x, y)$ 满足 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$ ，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ， $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 。

3、（6分）设 $u = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ ，求 du 。

二、(8 分) 设 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 试证在 $(0, 0)$ 处偏导数不存在 , 而在该点任一方向导数都存在且相等。

三、(8 分) 设空间曲线为 $\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = 1 + \sin t \\ z = 2\sqrt{2} \end{cases}$, 求该曲线在点 $\left(\frac{\pi}{2}, 1, 2\sqrt{2}\right)$ 处切线与法平面方程。

四、(8 分) 交换下式二重积分的积分顺序 :

$$\int_0^2 dx \int_0^{\frac{x^2}{2}} f(x, y) dy + \int_2^{2\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x, y) dy$$

五、(8分) 计算 $I = \iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv$, $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \sqrt{3(x^2 + y^2)}$

六、(8分) 计算 $I = \int_C -y dx + x dy$, C 为沿从点 $A(2,0)$ 到点 $O(0,0)$

七、(8 分) 计算

$$I = \iint_{\Sigma^{\text{外}}} x(x^2 + 1)dydz + y(y^2 + 2)dzdx + z(z^2 + 3)dxdy \quad ,$$

其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧。

八、(10 分) 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$ 的敛散性。

九、(8 分) 将 $f(x) = \ln x$ 在 $x_0 = 1$ 处展开为幂级数。

十、(8 分) 求解微分方程 $(\sin xy + xy \cos xy)dx + x^2 \cos xy dy = 0$

十一、(8 分) 试求函数 $f(x)$ 使曲线积分 $\int_C [f'(x) + 6f(x) + e^{-2x}] y dx + f'(x) dy$

与路径无关。

