

第1课 绪论

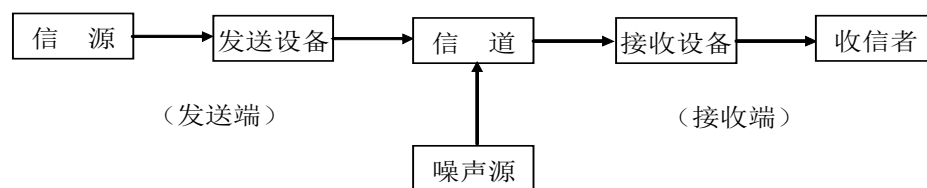
一、通信与通信系统的一般概念

1. 通信：传输与交换消息的过程。
2. 电通信：用电信号携带所要传递的消息，然后经过各种电信道进行传输与交换，以达到通信的目的。
3. 通信系统：为完成通信任务所需的一切技术设备和传输媒质所构成的总体。

二、通信系统的组成和各部分的作用

1. 信源：原始信号的来源，其作用是将消息转换成相应的电信号。（如电话机、话筒、摄像机、计算机以及各种数字终端设备）
2. 发送设备：对原始电信号进行各种处理和变换，使它变换成适合于信道中传输的形式。（调制、放大、滤波及数字发送设备中的编码功能等）
3. 信道（传输媒介）：发送设备和接收设备之间用于传输信号的媒介（有线和无线两大类）
4. 接收设备：对接收的信号进行处理和变换，以便恢复出对应于发送端的原始信号（放大、滤波、解调及数字接收设备中的译码等功能）
5. 信宿(收信者)：原始信号的最终接收者，其作用是把接收设备恢复出来的原始电信号转换成相应的消息（人、各种终端设备、计算机）

噪声源：是信道中的噪声和通信系统中其他部分所产生的噪声的集中表示。



三、模拟通信与数字通信

1. 模拟信号：凡信号参量的取值是连续的或取无穷多个值的，且直接与消息相对应的信号
2. 数字信号：凡信号参量只能取有限个值，并且常常不直接与消息相对应的信号。
3. 模拟信号与数字信号的区别：模拟（连续）信号不一定在时间上也连续；数字（离散）信号不一定在时间上也离散
4. 数字通信系统与模拟通信系统相比，其主要优点在于：（1）抗噪声性能好；（2）数字接力通信（中继）时可以消除噪声的积累；（3）可以采用信道编码降低误码率，提高通信质量；（4）便于加密，实现保密通信；（5）便于处理、存储、交换；（6）便于和计算机等连接，综合传递各种消息，使通信系统功能增强。
5. 数字通信的主要缺点：它比模拟通信占据数倍甚至数十倍宽的系统频带。（以电话为例，一路模拟电话通常占据 4KHz 的带宽，但一路数字电路所要占据 20KHz~60KHz 的带宽，因此在频带时分紧张而对通信质量没有特殊要求的场合，仍将沿用模拟通信。其优点是以占据更多系统频带为代价的。）

[问题 1] 语音信号为模拟信号，所以传输语音信号的系統一定是模拟通信系统，此说法正确吗？为何？

答：不对。因为语音信号可以转换为数字信号，然后通过数字通信系统进行传输。

[问题 2] 数字电话与模拟电话有什么区别？

答：区别在于数字电话是数字通信系统，语音信号在信道中已经转换为数字信号；而模拟电话是模拟通信系统，语音信号在信道中仍然为模拟信号。

四、通信系统的分类

1. 按消息的物理特征分类（业务）
如电报、电话、数据、图像通信系统
2. 按调制方式分类

基带传输：未经调制的信号直接传输（音频和数字基带）

调制传输：对各种信号变换方式后进行传输的总称。

3、按信号特征分类

最常用分为模拟与数字通信系统两大类

4、按信号复用方式分类

频分复用：用频谱搬移使不同信号占据不同的频率范围（主要用于模拟通信）

时分复用：用脉冲调制使不同信号占据不同的时间区间（主要用于数字通信）

码分复用：用一组正交的脉冲序列分别携带不同的信号（主要用于扩频通信）

5、按传输媒介分类

最常用分为有线（包括光纤）与无线

五、通信方式

1、按消息传输的方向与时间关系分

单工：单方向传输（一点发、一点收）。例如遥控。

半双工：通信双方（两点）均能收发信息但不能同时收发。例如无线对讲机。

全双工：通信双方（两点）能同时收发信号。例如电话。

2、按数字信号码元的排列方式分

串序传输：将数字信号按时间顺序一个接一个的传输，它占用一条通路。适合远距离。

并序传输：将数字信号码元序列分割成多路同时传输，
适合近距离。

六、通信发展简史

1838 年 有线电报发明，成为使用电通信的标志。

1876 年 有线电话发明，是现代通信的开端。

1878 年 第一个人工交换局，21 个用户。

1896 年 无线电报发明，无线通信的开端。

1906 年 电子管的发明，使有线、无线通信迅速发展。

20 世纪 30 年代 通信理论体系形成。

20 世纪 50 年代 晶体管和集成电路问世，模拟通信高速发展，数字通信方式形成，计算机和通信技术密切结合，人机通信、机器与机器之间的通信逐渐实现。

20 世纪 80 年代 通信网迅速发展，除传统的电话网、电报网以外，其它先进的通信网蓬勃发展，如移动通信网、综合业务数字网、公用数据网、智能网、宽带交换网等。

七、通信系统的质量指标

(1) 通信系统的质量指标主要有：有效性、可靠性、适应性、标准性、经济性及维护使用等。其中最主要的是有效性和可靠性，它们二者是对立统一的。

(2) 模拟通信系统的质量指标

1. 有效性

有效性可用单位时间内传送的信息量来衡量。模拟通信的有效性是指传输一定的信息量所消耗的信道资源数（带宽或时间），通常用有效传输带宽来衡量。同样的消息采用不同的调制方式，则需要不同的频带宽度。频带宽度越窄，则有效性越好。

2. 可靠性

可靠性是指接收信息的准确程度，模拟通信用均方差来衡量发送的模拟信号与接收端恢复的模拟信号之间的误差程度。在实际的模拟通信系统中，其可靠性是用接收终端的输出信噪比来度量的，这是因为在信道是理想的情况下，误差是由信号传输时的加性噪声产生的，而加性噪声一般用信噪比衡量。信噪比越大，通信

质量越高。

(3) 数字通信系统的质量指标

1. 有效性

数字通信的有效性用传输速率来衡量。

(1) 码元速率（传码率）

码元及码元长（宽）度：在数字通信中常用时间间隔相同的符号来表示一位 N 进制信号，此时间间隔内的信号称为 N 进制码元，时间间隔的长度称为码元长度。

码元速率：指单位时间传输的码元数，以 R_s 表示，单位： R_s id (波特，简记 Bd)。 T_s 为码元长度。
 $R_s = 1/T_s$

码元速率与数字信号进制没有关系，只与码元长度有关。

(2) 信息速率（传信率）

单位时间传输的信息量为信息速率，以 R_b 表示， R_b 位 bit/s (比特/秒)。

对于一个 M 进制数字信号， $R_b = R_s \log_2 M$ ，信息速率与进制有关。

对于二进制数字信号， $R_b = R_s$ 奇称它们为数码率。

(3) 频带利用率

$$\eta_b = R_b / B \quad B \text{ 为传输带宽}$$

[例题] 某消息用十六元码序列传送时，码元速率是 300 baud，问：其信息速率为多少？若改用二元码序列传送该消息，试求信息速率为多少？

$$\begin{aligned} \text{解: } R_{b16} &= (\log_2 16) \times R_{s16} = 4 \times 300 = 1200(\text{bit/s}) \\ R_{b2} &= R_{s2} = R_{s16} = 300(\text{bit/s}) \end{aligned}$$

2. 可靠性

数字通信的可靠性用差错率来衡量。

(1) 误码率

$$p_s = \lim_{n_s \rightarrow \infty} \frac{n_{es}(\text{差错码元数})}{n_s(\text{传输的码元总数})}$$

(2) 误信率

$$p_b = \lim_{n_b \rightarrow \infty} \frac{n_{eb}(\text{错误消息的比特数})}{n_b(\text{传输消息的总比特数})}$$

第 2 课 确定信号的分析

一、周期信号

周期为 T 的周期信号 $f(t)$ ，可以展开为：

1. 傅里叶级数

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

2. 三角级数

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

3. 指数形式

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

二、信号的傅里叶变换

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

三、信号的能量谱与功率谱

归一化能量：信号 $f(t)$ 在 1Ω 电阻上所消耗的能量

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt$$

平均功率：
$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt$$

若 $f(t)$ 为能量信号，则
$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

若 $f(t)$ 为周期性功率信号，则
$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$$

**** 结论：**时域内能量信号的总能量等于频域内各个频域分量能量的连续和。周期信号的总的平均功率等于各个频域分量功率的总和。

若

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\infty} E(f) df$$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} P(f) df$$

则称 $E(\omega)$ 为能量谱密度函数， $P(\omega)$ 为功率谱密度函数。

$$E(\omega) = |F(\omega)|^2$$

$$P(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T}$$

**** 结论：**功率谱只与功率信号频谱的模值有关，而与其相位无关。

四、波形的互相关和自相关

1. 互相关函数

设 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 是两个能量有限的能量号，则它们的互相关函数为：

$$R_{12}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t + \tau) d\tau$$

若 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 是两个功率信号，则：
$$R_{12}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(\tau) f_2(t + \tau) d\tau$$

2. 自相关函数

对于两个完全相同的信号，有下述关系：

对于能量信号，有：
$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) f(t + \tau) d\tau$$

对于功率信号，有：
$$R(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) f(t + \tau) d\tau$$

互相关函数的三个重要特性：

(1) $R_{12}(t) = 0$ ；(2) $t \neq 0, R_{12}(t) = R_{21}(-t)$ ；(3) $t=0$ 时， $R_{12}(0)$ 表示 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 无时差时的相关性

归一化相关系数：

(1) $\rho_{12}=0$ ；(2) $\rho_{12}=1$ ；(3) $\rho_{12}=-1$

自相关函数的三个重要特性。

(1) $R(t) = R(-t)$; (2) $R(0) \geq |R(t)|$; (3) $R(0)$ 表示能量或功率。

对于能量信号, 有: $R_{12}(t) \leftrightarrow F_2(\omega)F_1(-\omega)$

对于自相关函数, 有: $R(t) \leftrightarrow F(\omega)F(-\omega) = |F(\omega)|^2$

所以, 有: $R(t) \leftrightarrow E(\omega)$

对于功率信号, 同样有: $R(t) \leftrightarrow P(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} |F_T(\omega)|^2 / T$ 纳-辛钦关系

五、信号带宽

(1) 根据占总能量或总功率的百分比确定带宽, 设带宽为 B , 根据下列等式求带宽

$$\frac{2 \int_0^B |F(f)|^2 df}{E} = 90\% (\text{或} 95\%, 99\%) \quad \text{或} \quad \frac{2 \int_0^B |F_T(f)|^2 df}{P} = 90\% (\text{或} 95\%, 99\%)$$

(2) 根据能量谱或功率谱从最大值到下降 3dB 处所对应的频率间隔定义带宽

(3) 满足等式 $B = \int_{-\infty}^{\infty} E(f) df / 2E(0)$ 或 $B = \int_{-\infty}^{\infty} P(f) df / 2P(0)$

第 3 课 随机信号的分析

一、概率及随机变量

1. 概率: $P_A = \lim_{n \rightarrow \infty} (n_A / n)$

联合概率: $P(A, B) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n_{AB} / n)$

条件概率: $P(B|A) = P(A, B) / P(A)$ $P(A, B) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$

2. 随机变量

(1) 随机变量的概念

某随机实验可能有多个结果, 我们可以引入一变量 X , 它将随机地取某些数值, 用这些数值来表示各个可能的结果, 这一变量 X 就称之为随机变量。

当随机变量 X 的取值个数是有限的或可数无穷个时, 则称它为离散随机变量; 否则, 就称它为连续随机变量, 即可能的取值充满某一有限或无限区间。

如果一个随机实验需要用多个随机变量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 表示, 则多个随机变量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的总体称之为 n 维随机变量。

(2) 随机变量的概率分布函数和概率密度函数

用 $P(X \leq x)$ 表示 X 的取值不大于 x 的概率, 则定义函数 $F_X(x) = P(X \leq x)$ 变量 X 的概率分布函数。这里, X 可以是离散随机变量, 也可以是连续随机变量。

若 X 是连续随机变量, 对于一非负函数 $p_X(x)$ 有下式成立

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(x) dx$$

则 $p_X(x)$ 称之为 X 的概率密度函数 (简称概率密度)。

对二维随机变量 (X, Y) , 把两个事件 $(X \leq x)$ 和 $(Y \leq y)$ 同时出现的概率定义为二维随机变量的二维分布函数

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

同样, $p_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x, y)$ 二维概率密度。

二、随机变量的数字特征

(1) 数学期望: 反映了随机变量取值的集中位置 (均值)

设 $p_X(x_i)(i=1,2,\cdots,K)$ 是离散随机变量 X 的取值 x_i 的概率, 则其数学期望为

$$a_X = E[X] = \sum_{i=1}^K x_i p_X(x_i)$$

对于连续随机变量 X , 设 $p_X(x)$ 为其概率密度函数, 则其数学期望为

$$a_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx$$

(2) 方差: 反映了随机变量的集中程度;

方差定义为:

$$\sigma_X^2 = D[X] = E[(X - a_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (X - a_X)^2 p_X(x) dx$$

式中 $a_X = E[X]$ 。而方差的平方根又称为均方差或标准偏差。

(3) 两个随机变量的相关系数: 反映了它们之间的线性相关程度。

对两个随机变量 X, Y 定义:

$$C[XY] = E[(X - a_X)(Y - a_Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (X - a_X)(Y - a_Y) p_{X,Y}(x, y) dx dy$$

为 X, Y 的相关矩或协方差。

而 X, Y 的归一化相关矩, 称之为 X, Y 的**相关系数**, 定义为

$$\rho = \frac{E[(X - a_X)(Y - a_Y)]}{\sqrt{E[(X - a_X)^2]E[(Y - a_Y)^2]}} = \frac{C[XY]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

[例题] 试求下列均匀概率密度函数的数学期望和方差:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{其它 } x \end{cases}$$

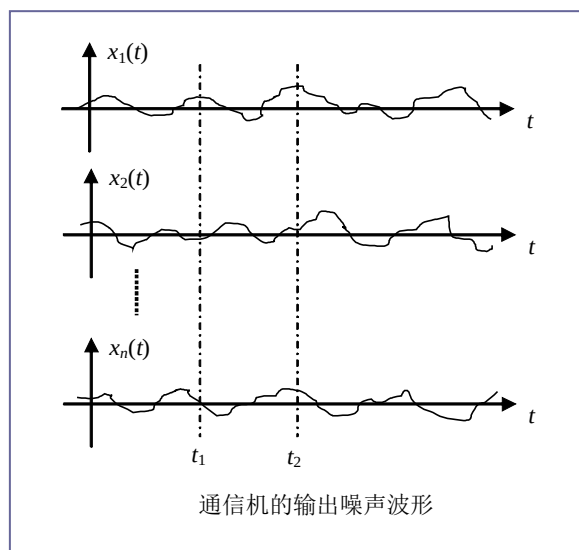
$$\text{解: } E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-a}^a \frac{x}{2a} dx = \frac{x^2}{4a} \Big|_{-a}^a = 0$$

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f(x) dx = \int_{-a}^a \frac{x^2}{2a} dx = \frac{x^3}{6a} \Big|_{-a}^a = \frac{a^2}{3}$$

三、随机过程及其统计特性

1. 随机过程的概念

定义: 设随机实验 E 的可能结果为 $X(t)$, 实验的样本空间 S 为 $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_i(t)\}$, i 为正整数, $x_i(t)$ 为第 i 个样本函数 (又称之为实现), 每次实验之后, $X(t)$ 取空间 S 中的某一样本函数, 于是称此 $X(t)$ 为随机函数。当 t 代表时间量时, 则称此 $X(t)$ 为随机过程。



2. 随机过程的概率分布函数和概率密度函数

设 $X(t)$ 为一随机过程，则 $X(t_1)$ 为一随机变量，此随机变量的分布函数为 $F_1(x_1, t_1) = P\{X(t_1) \leq x_1\}$ ，称之为随机过程 $X(t)$ 的一维分布函数。如果 $\partial F_1(x_1, t_1) / \partial x_1 = p_1(x_1, t_1)$ 存在，则称为随机过程 $X(t)$ 的一维概率密度函数。

一般用一维分布函数或一维概率密度函数去描述随机过程的完整统计特性是极不充分的，通常需要在足够多的时间点上考虑其分布函数或概率密度函数。 $X(t)$ 的 n 维分布函数定义为：

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n\}$$

如果 $\frac{F_1(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = p_1(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ 存在，则称之为随机过程 $X(t)$ 的 n 维概率

密度函数。

3. 随机过程的统计特性（数字特征）

（1）数学期望：随机过程 $X(t)$ 的数学期望定义为

$$a(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_1(x, t) dx$$

它本该在 t_1 时刻求得，但 t_1 是任意的，所以它是时间的函数。

（2）方差：随机过程 $X(t)$ 的方差定义为

$$\begin{aligned} \sigma^2(t) &= D[X(t)] = E\{[X(t) - E(X(t))]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} [x - a(t)]^2 p_1(x, t) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_1(x, t) dx - \int_{-\infty}^{\infty} 2xa(t) p_1(x, t) dx + \int_{-\infty}^{\infty} [a(t)]^2 p_1(x, t) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_1(x, t) dx - 2a(t) \int_{-\infty}^{\infty} x p_1(x, t) dx + [a(t)]^2 \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x, t) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_1(x, t) dx - [a(t)]^2 \end{aligned}$$

（3）协方差函数和相关函数

协方差函数定义为

$$\begin{aligned} C_X(t_1, t_2) &= E\{[X(t_1) - a(t_1)][X(t_2) - a(t_2)]\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - a(t_1)][x_2 - a(t_2)] p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

相关函数定义为

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

第 4 课 平稳随机过程

一、平稳随机过程概念

平稳随机过程是指它的任何 n 维分布函数或概率密度函数与时间起点无关。即：对于任意的正整数 n 和任意实数 $t_1, t_2, \dots, t_n, \tau$ ，随机过程 $X(t)$ 的 n 维概率密度函数满足

$$p_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = p_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau)$$

则称 $X(t)$ 为平稳随机过程（严平稳随机过程或狭义平稳随机过程）。由此可见，平稳随机过程的统计特性将不随时间的推移而不同。

因为， $p_1(x_1, t_1) = p_1(x, t_1 + \tau) = p_1(x, t) = p_1(x)$ 的一维分布与 t 无关；又

$$p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = p_2(x_1, x_2; t_1 + \tau_0, t_2 + \tau_0)$$

$$\text{令 } t_2 - t_1 = \tau, \text{ 则 } p_2(x_1, x_2; t_1, t_1 + \tau) = p_2(x_1, x_2; t_1 + \tau_0, t_1 + \tau_0 + \tau) = p_2(x_1, x_2; \tau)$$

所以它的二维分布只与时间间隔 τ 有关。

平稳随机过程的数学期望为

$$a(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_1(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x p_1(x) dx = a$$

平稳随机过程的方差为

$$\sigma^2(t) = D[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [x - a(t)]^2 p_1(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 p_1(x) dx = \sigma^2$$

由此可见平稳随机过程的数学期望和方差均与时间无关；它的自相关函数只与时间间隔有关，即

$$R(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_2(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 = R(\tau)$$

满足式上述三式的随机过程称之为宽平稳随机过程或广义平稳随机过程。

二、平稳随机过程的自相关函数

- (1) $R(0)$ 为 $X(t)$ 的平均功率： $R(0) = E[X^2(t)] = s$
- (2) $R(\tau)$ 为偶函数： $R(\tau) = R(-\tau)$
- (3) $R(0)$ 为 $R(\tau)$ 的上界： $|R(\tau)| \leq R(0)$
- (4) $R(\infty)$ 为 $X(t)$ 的直流功率： $R(\infty) = E^2[X(t)]$
- (5) $R(0) - R(\infty)$ 为 $X(t)$ 的交流功率（方差）： $R(0) - R(\infty) = \sigma^2$

[例题] 试证明随相信号 $s(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$ 是广义平稳随机过程。其中， A, ω_0 是常数，相位 θ 是在 $0 \sim 2\pi$ 上均匀分布的随机变量。

证明：

$$\begin{aligned} a(t) &= E\{A \cos(\omega_0 t + \theta)\} = AE\{\cos \omega_0 t \cos \theta - \sin \omega_0 t \sin \theta\} \\ &= A \cos \omega_0 t E\{\cos \theta\} - A \sin \omega_0 t E\{\sin \theta\} \\ &= A \cos \omega_0 t \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cos \theta d\theta - A \sin \omega_0 t \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \sin \theta d\theta = 0 \\ \sigma^2(t) &= E\{[s(t) - a(t)]^2\} = E\{[A \cos(\omega_0 t + \theta)]^2\} \\ &= \frac{A^2}{2} E[1 + \cos 2(\omega_0 t + \theta)] = \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(t, t+\tau) &= E\{A\cos(\omega_0 t + \theta)A\cos[\omega_0(t+\tau) + \theta]\} \\
&= \frac{A^2}{2} E[\cos \omega_0 \tau + \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\theta)] \\
&= \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau + \frac{A^2}{2} E[\cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\theta)] \\
&= \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau = R(\tau)
\end{aligned}$$

可见, $a(t)$ 、 $\sigma^2(t)$ 和 $R(t, t+\tau)$ 均与时间无关, 而 $R(t, t+\tau) = R(\tau)$ 仅与时间间隔有关, 所以, $s(t)$ 是广义平稳随机过程。

三、平稳随机过程的功率谱密度和自相关函数之间的关系

确定信号的自相关函数 $R(\tau)$ 与其功率谱 $P(\omega)$ 之间有确定的傅立叶变换关系, 平稳随机过程 $X(t)$ 的自相关函数与其功率谱之间也互为傅立叶变换关系, 即

$$P_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

四、平稳随机过程通过线性系统

随机过程通过线性系统的分析方法可以用确定信号通过线性系统的方法进行分析, 因为随机过程的一个实现加到线性系统的输入端, 则必将获得一个系统响应。因此, 只要输入有界且系统是物理可实现的, 则当输入是随机过程 $X(t)$ 时, 便有输出随机过程 $Y(t)$, 且有

$$Y(t) = X(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) X(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

对随机过程, 我们关心的是它的统计特性。

1. $Y(t)$ 的数学期望

$$E[Y(t)] = a_X \cdot H(0)$$

输出过程的数学期望与 t 无关。 $a_X = E[X(t-\tau)] = E[X(t)]$

为常

数, $H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{j\omega t} dt$ 为 $h(t)$ 的傅立叶变换。

2. $Y(t)$ 的自相关函数

$$R_Y(t_1, t_2) = E[Y(t_1)Y(t_1+\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(u)h(v)R_X(\tau+u-v)dudv = R_Y(\tau)$$

自相关函数只依赖于时间间隔, 而与时间起点无关。

基于 1、2 两点, 此时输出过程是宽平稳的。

3. $Y(t)$ 的功率谱密度

$$P_Y(\omega) = H^*(\omega)H(\omega)P_X(\omega) = |H(\omega)|^2 P_X(\omega)$$

4. $Y(t)$ 的分布

在给定输入过程分布的情况下, 原理上可以求得输出过程的分布。一种十分有用的结论是: 高斯过程经过线性变换后的过程仍然是高斯过程。

五、高斯随机过程

1. 一维正态分布

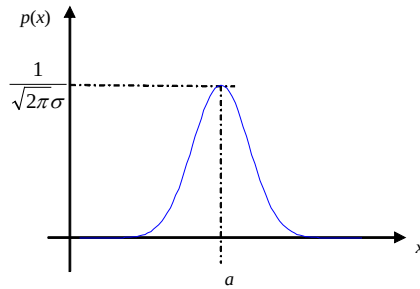
若随机变量 X 的概率密度函数可以表示为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]$$

则 X 称之为二维正态分布的随机变量。

2. 一维正态分布的特性

一维正态分布的 $p(x)$ 可以由图表示



正态分布的概率密度

X 大于常数 C 的概率为:

$$P(X > C) = \int_C^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \int_{\frac{C-a}{\sigma}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] dz \quad z = \frac{x-a}{\sigma}$$

Q 函数的定义为:

$$Q(\alpha) = \int_\alpha^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy$$

所以:

$$P(X > C) = Q\left(\frac{C-a}{\sigma}\right)$$

六、窄带随机过程

1. 窄带随机过程过程的定义

窄带系统是指通带宽度 $\Delta f \ll f_c$ ，且通带的中心频率 $f_c \gg 0$ 的系统。窄带随机过程可以表示为:

$$X(t) = A_X(t) \cos[\omega_c t + \varphi_X(t)] \quad A_X(t) \geq 0$$

$$X(t) = A_X(t) \cos \varphi_X(t) \cos \omega_c t - A_X(t) \sin \varphi_X(t) \sin \omega_c t = X_I(t) \cos \omega_c t - X_Q(t) \sin \omega_c t \quad \text{式 中}$$

$$X_I(t) = A_X(t) \cos \varphi_X(t) \quad X_Q(t) = A_X(t) \sin \varphi_X(t)$$

分别称为 $X(t)$ 的同相分量和正交分量。

2、零均值平稳高斯窄带随机过程的统计特性

(1) 数学期望

因为 $X(t)$ 平稳，且已假设是零均值的，故

$$E[X(t)] = E[X_I(t)] \cos \omega_c t - E[X_Q(t)] \sin \omega_c t = 0$$

$$\text{则 } E[X_I(t)] = 0 \quad E[X_Q(t)] = 0$$

(2) 自相关函数

$$R_X(\tau) = R_I(\tau) \cos \omega_c \tau - R_{IQ}(\tau) \sin \omega_c \tau$$

$$R_x(\tau) = R_Q(\tau) \cos \omega_c \tau + R_{QI}(\tau) \sin \omega_c \tau$$

$$\text{由于 } R_I(\tau) = R_Q(\tau) \quad R_{IQ}(\tau) = -R_{QI}(\tau)$$

$$\text{所以, 有 } R_x(0) = R_I(0) = R_Q(0) \quad \text{即 } \sigma_x^2 = \sigma_I^2 = \sigma_Q^2$$

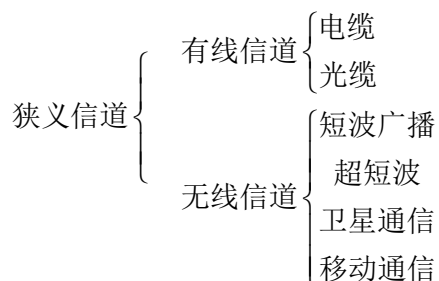
$$\text{功率谱密度为 } P_I(\omega) = P_Q(\omega) = \begin{cases} P_x(\omega - \omega_c) + P_x(\omega + \omega_c), & -W \leq \omega \leq W \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

第5课 信道、噪声及信息度量

一、信道

(1) 信道的定义

信道：以传输媒质为基础的信号通道



广义信道：除传输媒质外，还包括有关发送设备、接收设备、天线、Modem 等。

(2) 调制信道模型 (连续系统)

共性:1) 有一对(或多对)输入、输出端

2) 线性的

3) 对信号有延迟、损耗

4) 无信号输入时，仍有噪声输出

时变线性网络模型为：

如果网络的函数变换关系定义为 $k(t)$ ，网络的输入为 $e_i(t)$ 则网络的输出 $e_o(t) = k(t)e_i(t) + n(t)$

注： $k(t)$: 乘性干扰。恒参信道： $k(t) = \text{常数}$

随参信道： $k(t) \neq \text{常数}$

$n(t)$: 加性干扰。

二、白噪声

(1) 白噪声的定义

功率谱密度在整个频域内都是均匀分布的噪声，称之为白噪声，即 $P_n(\omega) = n_0/2$

式中， n_0 是一个常数，单位为“瓦/赫兹” (W/Hz)。

白噪声的自相关函数为 $R(\tau) = F^{-1}[P_n(\omega)] = n_0 \delta(t)/2$

如果白噪声服从高斯分布，则称之为高斯白噪声。高斯白噪声在任意两个不同的时刻的取值不仅是不相关的，而且还是统计独立的。

高斯白噪声的功率谱密度 $P_n(\omega) = n_0/2$

式中， n_0 为单边功率谱密度； $n_0/2$ 为双边功率谱密度。

(2) 带限白噪声

如果白噪声被限制在 $(-f_0, f_0)$ 之内, 则这样的白噪声称之为带限白噪声 (理想低通白噪声), 即

$$P_n(\omega) = \begin{cases} \frac{n_0}{2} & |f| \leq f_0 \\ 0 & \text{其余} f \end{cases}$$

$$\text{其自相关函数为 } R(\tau) = F^{-1}[P_n(\omega)] = \int_{-f_0}^{f_0} \frac{n_0}{2} e^{j2\pi f\tau} df = f_0 n_0 \frac{\sin \omega_0 \tau}{\omega_0 \tau} = \frac{\omega_0 n_0}{2\pi} \text{Sa}(\omega_0 \tau)$$

白噪声、理想低通白噪声和理想带通白噪声的功率谱及其自相关函数如图所示。

[例题] 设信道噪声是一个均值为 0, 双边功率谱密度为 $n_0/2$ 的高斯白噪声, 接收机输入端的收滤波器是一个中心角频率为 ω_c 、带宽为 B 的理想低通滤波器, 且 $f_c \gg B$:

- (1) 求收滤波器输出噪声时域表达式和双边功率谱密度;
- (2) 求收滤波器输出噪声的自相关函数;
- (3) 求收滤波器输出噪声功率;
- (4) 写出收滤波器输出噪声的一维概率密度函数。

解: (1) 因为 $f_c \gg B$, 所以收带通滤波器输出噪声是一个窄带白噪声, 它的时域表达式为:

$$n(t) = n_I(t) \cos \omega_c t - n_Q(t) \sin \omega_c t$$

$n(t)$ 的双边功率谱密度为

$$P_n(f) = \begin{cases} \frac{n_0}{2} & f_c - B/2 \leq |f| \leq f_c + B/2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$P_n(f)$ 的图形如图所示

$$(2) \quad P_n(\omega) = \frac{n_0}{2} [D_{2\pi B}(\omega + \omega_c) + D_{2\pi B}(\omega - \omega_c)]$$

$$D_{2\pi B}(\omega) \leftrightarrow \frac{2\pi B}{2\pi} \text{Sa}\left(\frac{2\pi Bt}{2}\right) = B \text{Sa}(\pi Bt)$$

根据傅里叶变换的频移特性, 得 $n(t)$ 的自相关函数

$$\begin{aligned} R_n(t) &= \frac{n_0}{2} [B \text{Sa}(\pi Bt) e^{-j\omega_c t} + B \text{Sa}(\pi Bt) e^{j\omega_c t}] \\ &= n_0 B \cos(\omega_c t) \text{Sa}(\pi Bt) \end{aligned}$$

(3) 收滤波器输出噪声功率为

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} P_n(f) df = \int_{-f_c - B/2}^{-f_c + B/2} \frac{n_0}{2} df + \int_{f_c - B/2}^{f_c + B/2} \frac{n_0}{2} df = n_0 B$$

(4) $n(t)$ 是一个均值为 0, 方差为 $n_0 B$ 的高斯过程, 其一维概率密度为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi n_0 B}} \exp\left[-\frac{x^2}{2n_0 B}\right]$$

三、信息及其度量

(1) 信息量

若 x_i 出现的概率为 $P(x_i)$ ，则其信息量为：

$$I(x_i) = \log_{\alpha} \frac{1}{P(x_i)} = -\log_{\alpha} P(x_i) = \log_2 \frac{1}{P(x_i)} = -\lg P(x_i) \quad \text{单位比特 (bit)}$$

(2) 平均信息量 (信源熵)

设 N 种信息源中第 i 种信息出现 n_i 次，且其出现的概率为 $P(x_i)$ ，则整个消息的信息量为：

$$I = -\sum_{i=1}^N n_i \log P(x_i)$$

统计平均信息量为： $H(x) = -\sum_{i=1}^N P(x_i) \log P(x_i)$

通过平均信息量计算总信息量，利用下式： $I = H(x) \cdot n$

信息源中各种符号等概出现信息量最大，即： $H_{\max} = -\sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \log \frac{1}{N} = \log N$

[例题] 一个由字母 A, B, C, D 组成的字，对于传输的每个字母用二进制脉冲编码，00, 01, 10, 11 分别代表 A, B, C, D。每个脉冲宽度为 5ms。

1) 各字母等概出现，求平均信息传输速率。

2) 每字母出现可能性分别为 $P_A = \frac{1}{5}$, $P_B = \frac{1}{4}$, $P_C = \frac{1}{4}$, $P_D = \frac{3}{10}$ ，求传输平均信息速率。

解 1) 每字母传输时间为 10ms，所以

$$n = \frac{1}{10 \times 10^{-3}} = 100 \text{ 个}$$

$$H(x) = \left(-\frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4}\right) \times 4 = \log_2 4 = 2 \text{ bit / symbol}$$

$$R_b = H(x) \cdot n = 200 \text{ bit / s}$$

2) 每字母平均信息量

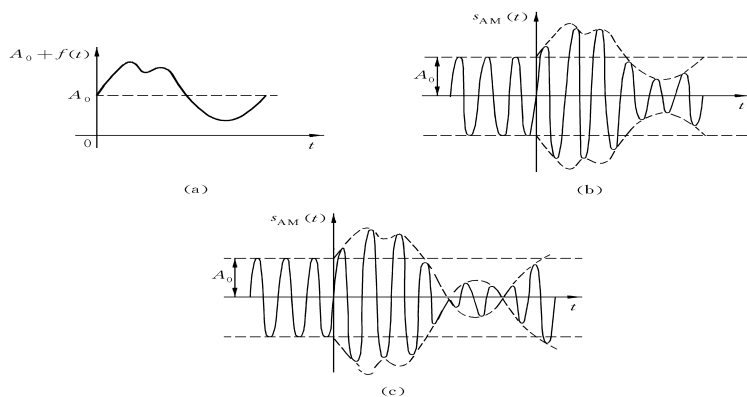
$$H(x) = -\frac{1}{5} \log_2 \frac{1}{5} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{3}{10} \log_2 \frac{3}{10} = 1.985 \text{ bit / symbol}$$

$$R_b = n \cdot H(x) = 198.5 \text{ bit / s}$$

第 6 课 常规调幅与抑制载波双边带调幅

一、常规调幅 (AM)

常规调幅为： $s_{AM}(t) = [A_0 + f(t)] \cos(\omega_c t + \theta_c)$



若 $f(t) = A_m \cos(\omega_m t + \theta_m)$

$$\begin{aligned} \text{则有: } s_{AM}(t) &= [A_0 + A_m \cos(\omega_m t + \theta_m)] \cos(\omega_c t + \theta_c) \\ &= A_0 [1 + \beta_{AM} \cos(\omega_m t + \theta_m)] \cos(\omega_c t + \theta_c) \end{aligned}$$

上式中, $\beta_{AM} = A_m / A_0$, 称为调幅指数, 用百分比表示时, 称为调制度。取值分小于 1, 等于 1 和大于 1 三种可能, 分别对应正常调幅、满调幅和过调幅三种情况。

若调制信号为一般信号, 则取调幅指数为: $\beta_{AM} = |f(t)|_{\max} / A_0$

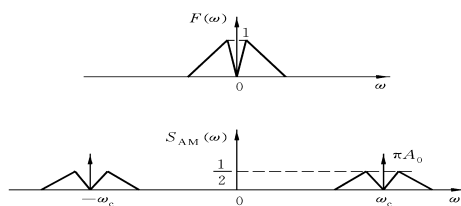
当载波初相为 0 时, 已调信号为: $s_{AM}(t) = [A_0 + f(t)] \cos \omega_c t = A_0 \cos \omega_c t + f(t) \cos \omega_c t$

若有:

$$\begin{aligned} f(t) &\leftrightarrow F(\omega) \\ A_0 \cos \omega_c t &\leftrightarrow \pi A_0 [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] \\ f(t) \cos \omega_c t &\leftrightarrow \frac{1}{2} [F(\omega - \omega_c) + F(\omega + \omega_c)] \end{aligned}$$

则已调信号的频谱为: $S_{AM}(\omega) = \pi A_0 [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] + \frac{1}{2} [F(\omega - \omega_c) + F(\omega + \omega_c)]$

此时, 已调信号的频谱如下图所示:



调幅信号的平均功率为:

$$\begin{aligned} P_{AM} &= \overline{s_{AM}^2(t)} \\ &= \overline{[A_0 + f(t)]^2 \cos^2 \omega_c t} \\ &= \overline{A_0^2 \cos^2 \omega_c t + f^2(t) \cos^2 \omega_c t + 2A_0 f(t) \cos^2 \omega_c t} \end{aligned}$$

由于 $\overline{f(t)} = 0$, $\cos^2 \omega_c t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega_c t)$, $\overline{\cos 2\omega_c t} = 0$

所以有: $P_{AM} = \frac{A_0^2}{2} + \frac{\overline{f^2(t)}}{2} = P_c + P_f$

调制效率: 边带功率与总功率之比。即:

$$\eta_{AM} = \frac{P_f}{P_{AM}} = \frac{P_f}{P_c + P_f} = \frac{\frac{1}{2} \overline{f^2(t)}}{\frac{1}{2} A_0^2 + \frac{1}{2} \overline{f^2(t)}} = \frac{\overline{f^2(t)}}{A_0^2 + \overline{f^2(t)}}$$

当 $f(t) = A_m \cos(\omega_m t + \theta_m)$ 时, 有: $\overline{f^2(t)} = A_m^2 / 2$

此时: $\eta_{AM} = \frac{\frac{1}{2} A_m^2}{A_0^2 + \frac{1}{2} A_m^2} = \frac{A_m^2}{2A_0^2 + A_m^2} = \frac{\beta_{AM}^2}{2 + \beta_{AM}^2}$

若 $\beta_{AM} = 1$, 则有其最大值为 1/3。

[例题] 已知一个 AM 广播电台输出功率是 50 kW, 采用单频余弦信号进行调制, 调幅指数为 0.707。

(1) 试计算调制效率和载波功率;

(2) 如果天线用 50 Ω 的电阻负载表示, 求载波信号的峰值幅度。

解: (1) 依调制效率计算公式, 有 $\eta_{AM} = \frac{\beta_{AM}^2}{2 + \beta_{AM}^2} = \frac{0.707^2}{2 + 0.707^2} = \frac{1}{5}$

又因为 $\eta_{AM} = \frac{P_f}{P_c + P_f} = \frac{P_f}{P_{AM}}$, 所以, 有:

$$P_c = P_{AM} - P_f = P_{AM}(1 - \eta_{AM}) = 50 \times \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 40 \text{ (kW)}$$

(2) 因为 $P_c = \frac{A^2}{2R}$, 所以, 有: $A = \sqrt{2P_c R} = \sqrt{2 \times 40 \times 10^3 \times 50} = 2000 \text{ (V)}$

二、抑制载波双边带调幅 (DSB-SC)

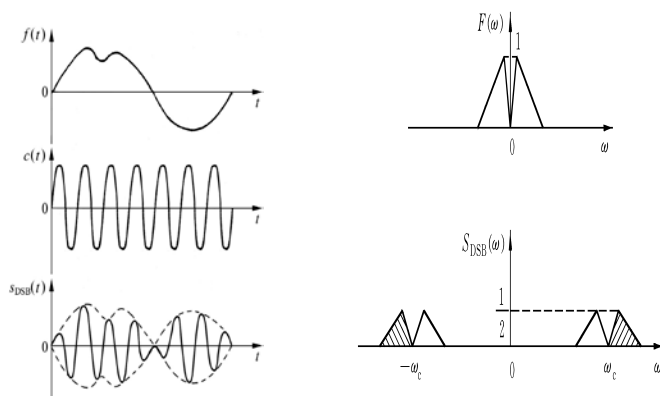
DSB-SC 信号表达式为: $s_{DSB}(t) = f(t)\cos\omega_c t$

已调波频谱为: $S_{DSB}(\omega) = \frac{1}{2}F(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2}F(\omega + \omega_c)$

已调信号平均功率为: $P_{DSB} = \overline{s_{DSB}^2(t)} = \overline{f^2(t)\cos^2\omega_c t}$

边带功率即信号的全部功率, 所以调制效率为: $\eta_{DSB} = 1$

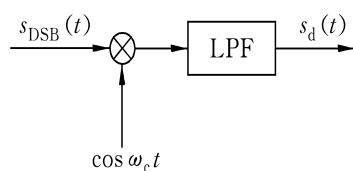
DSB-SC 波形图及频谱图如下:



三、调制与解调

解调包括相干解调和包络解调两种方式。

(1) 相干解调

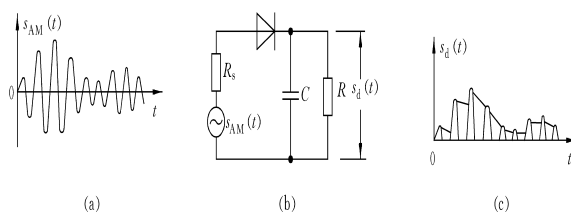


相干解调模型如上图所示。其关键是必须有一个同频同相的载波。表达式如下：

$$s_{\text{DSB}}(t) \cdot \cos \omega_c t = f(t) \cdot \cos^2 \omega_c t = \frac{1}{2} f(t) + \frac{1}{2} f(t) \cos 2\omega_c t$$

经低通后，得到： $s_d(t) = \frac{1}{2} f(t)$ ，从而恢复了原有的调制信号。

(2) 包络检波原理如下：



其中 RC 的取值范围为： $f_m \ll \frac{1}{RC} \ll f_c$

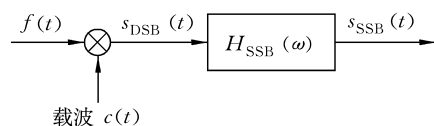
检波器的输出为： $s_d(t) \approx A + f(t)$

第 7 课 单边带调制与残留边带调制

一、单边带调制(SSB)

(1) 滤波法形成 SSB 信号

滤波法形成 SSB 信号原理如下图所示：

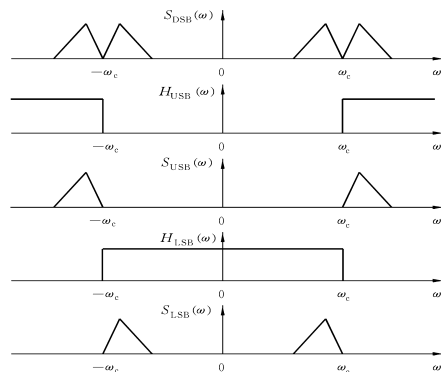


其中， $H_{SSB}(\omega) = H_{USB}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| > \omega_c \\ 0, & |\omega| \leq \omega_c \end{cases}$

$$H_{SSB}(\omega) = H_{LSB}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| \geq \omega_c \end{cases}$$

所以，SSB 信号频谱为： $S_{SSB}(\omega) = S_{DSB}(\omega) \cdot H(\omega)$

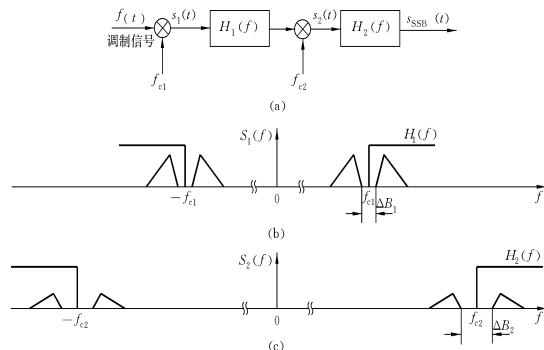
其频谱变换关系如图所示。



归一化值： $\alpha = \Delta f / f_c$

一般要求： $\alpha \geq 10^{-3}$ ，否则滤波就难以实现。

多级滤波法原理如下图所示：



这里： $\Delta B_1 = 2f_L$ $\Delta B_2 = 2f_{c1} + 2f_L \approx 2f_{c1}$

(2) 相移法形成 SSB 信号

设调制信号为： $f(t) = A_m \cos \omega_m t$

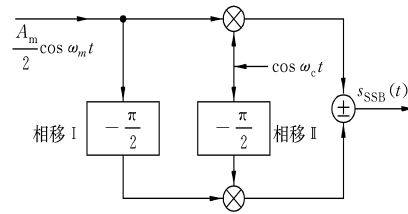
载波信号为： $c(t) = \cos \omega_c t$

则 DSB 信号为： $s_{DSB}(t) = A_m \cos \omega_m t \cos \omega_c t = \frac{1}{2} A_m \cos(\omega_c + \omega_m) t + \frac{1}{2} A_m \cos(\omega_c - \omega_m) t$

上边带信号为： $s_{USB}(t) = \frac{1}{2} A_m \cos(\omega_c + \omega_m) t = \frac{A_m}{2} \cos \omega_m t \cos \omega_c t - \frac{A_m}{2} \sin \omega_m t \sin \omega_c t$

下边带信号为： $s_{LSB}(t) = \frac{A_m}{2} \cos \omega_m t \cos \omega_c t + \frac{A_m}{2} \sin \omega_m t \sin \omega_c t$

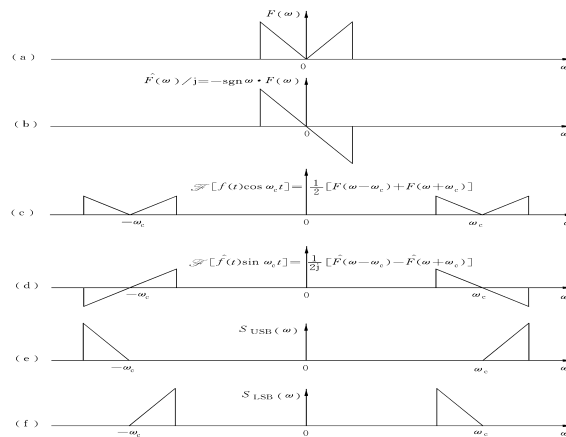
相移法形成单边带信号原理如下图所示：



SSB 信号第一项为同相分量，第二项为正交分量。

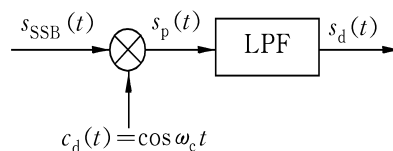
若调制信号为非周期信号，则通过希尔伯特变换实现 SSB 信号的产生。

移相法产生 SSB 信号频谱变换关系如图所示：



(3) SSB 信号的解调

相干解调原理如右下图所示：



由于输入信号为： $s_{SSB}(t) = f(t)\cos\omega_c t \mp \hat{f}(t)\sin\omega_c t$

所以 $s_p(t) = s_{SSB}(t)\cos\omega_c t = f(t)/2 + f(t)\cos 2\omega_c t/2 \mp \hat{f}(t)\sin 2\omega_c t/2$

经低通后输出为： $s_d(t) = f(t)/2$

[例题] 用 0 Hz~3 000 Hz 的信号调制频率为 20.000 MHz 的载波以产生单边带信号。对该信号用超外差接收机进行解调，接收机框图如下图所示，两级混频器的本机振荡频率分别为 f_0 和 f_d ，限定 f_0 高于输入信号的频率，中频放大器的通带范围是 10.000 MHz ~ 10.003 MHz。

(1) 如果信号是上边带信号，试确定 f_0 和 f_d 的频率；

(2) 如果信号是下边带信号，重复(1)。

解：(1) 若为上边带， f_i 为 20.000 MHz ~ 20.003 MHz。由于要求外差，故有：

$$f_0 - (20.000 \sim 20.003) = 10.003 \text{ MHz} \sim 10.000 \text{ MHz}$$

由此得： $f_0 = 30.003 \text{ MHz}$

由于 $f_d - (10.003 \sim 10.000) = 0 \text{ MHz} \sim 0.003 \text{ MHz}$

所以 $f_d = 10.003 \text{ MHz}$

(2) 若为下边带, f_i 为 $20.000 \text{ MHz} \sim 19.997 \text{ MHz}$ 。由于要求外差, 故有:

$$f_0 - (20.000 \sim 19.997) = 10 \text{ MHz} \sim 10.003 \text{ MHz}$$

由此得: $f_0 = 30 \text{ MHz}$

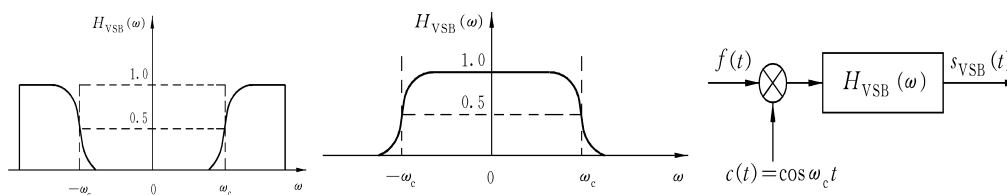
由于 $(10.000 \sim 10.003) - f_d = 0 \text{ MHz} \sim 0.003 \text{ MHz}$

于是 $f_d = 10.000 \text{ MHz}$

二、残留边带调制(VSB)

(1) 残留边带的产生

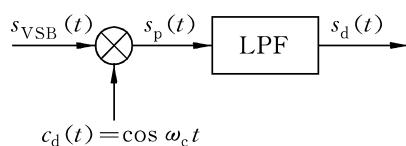
使用滤波器特性为残留下边带, 使用右下滤波特性为残留上边带。



VSB 信号频域表达式为: $S_{VSB}(\omega) = H_{VSB}(\omega)[F(\omega - \omega_c) + F(\omega + \omega_c)]/2$

(2) VSB 信号的解调

VSB 调制信号采用相干解调方式, 见下图:



其输出为: $s_p(t) = s_{VSB}(t) \cdot c_d(t) = s_{VSB}(t) \cos \omega_c t$

经低通后输出: $S_d(\omega) = F(\omega)[H_{VSB}(\omega - \omega_c) + H_{VSB}(\omega + \omega_c)]/4$

可见, 只要有下式成立, 解调输出就不会失真。

$$H_{VSB}(\omega - \omega_c) + H_{VSB}(\omega + \omega_c) = \text{常数} \quad |\omega| \leq \omega_H$$

第 8 课 线性调制系统的抗噪声性能

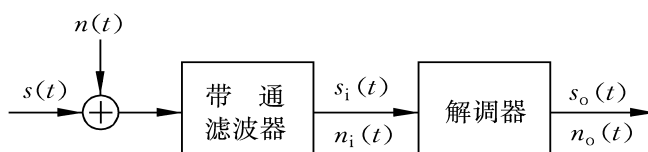
学习内容: 通信系统抗噪声性能的分析模型 线性调制相干解调的抗噪声性能

重点难点: DSB 信号与 SSB 信号的抗噪声性能分析方法

教学方法: PPT

教学课时: 2 课时

一、通信系统抗噪声性能的分析模型



高斯白噪声通过 BPF 后，输出为高斯窄带噪声。即

$$n_i(t) = V(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t)] = V(t) \cos \theta(t) \cos \omega_0 t - V(t) \sin \theta(t) \sin \omega_0 t = n_I(t) \cos \omega_0 t - n_Q(t) \sin \omega_0 t$$

式中 $n_I(t) = V(t) \cos \theta(t)$ $n_Q(t) = V(t) \sin \theta(t)$

由随机过程理论可知： $\overline{n_i(t)} = \overline{n_I(t)} = \overline{n_Q(t)} = 0$

设高斯白噪声双边功率谱密度为 $n_0/2$ ，BPF 特性理想，单边带宽为 B，则有：

$$N_i = \frac{n_0}{2} \cdot 2B = n_0 B$$

定义解调器输出信噪比（SNR）为：

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{\text{解调器输出有用信号的平均功率}}{\text{解调器输出噪声的平均功率}}$$

对于不同调制方式，定义信噪比增益如下：

$$G = \frac{S_o / N_o}{S_i / N_i}$$

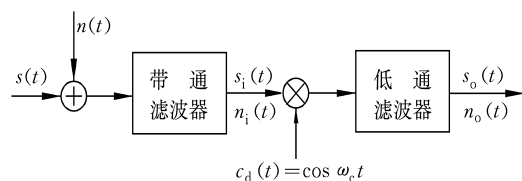
上式中，分母为输入信噪比，其定义为：

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{\text{解调器输入已调信号的平均功率}}{\text{解调器输入噪声的平均功率}}$$

在相同的输入功率条件下，不同系统的信噪比增益，系统的抗噪声性能不同。信噪比增益愈高，则解调器的抗噪声性能愈好。

二、线性调制相干解调的抗噪声性能

模型见下图：



此时，有： $s_i(t) + n_i(t) = s(t) + n_i(t)$

（1）DSB 调制相干解调

由于 $n_i(t) = n_I(t) \cos \omega_c t - n_Q(t) \sin \omega_c t$

所以有： $[s(t) + n_i(t)] \cos \omega_c t$

$$= [f(t) \cos \omega_c t + n_I(t) \cos \omega_c t - n_Q(t) \sin \omega_c t] \cos \omega_c t$$

$$= f(t) \cos^2 \omega_c t + n_I(t) \cos^2 \omega_c t - n_Q(t) \sin \omega_c t \cos \omega_c t$$

$$= f(t)/2 + f(t) \cos 2\omega_c t / 2 + n_I(t)/2 + n_I(t) \cos 2\omega_c t / 2 - n_Q(t) \sin 2\omega_c t / 2$$

经低通后输出： $s_o(t) + n_o(t) = f(t)/2 + n_I(t)/2$

输出信号功率为： $S_o = \overline{f^2(t)}/4 = E[f^2(t)]/4$

输出噪声功率为: $N_o = \overline{n_I^2(t)} / 4 = n_0 B_{\text{DSB}} / 4 = n_0 W / 2$

输出信噪比为: $\frac{S_o}{N_o} = \frac{E[f^2(t)]}{2n_0 W}$

输入已调信号功率为: $S_i = \overline{f^2(t) \cos^2 \omega_c t} = \overline{f^2(t)} / 2 = E[f^2(t)] / 2$

输入噪声功率为: $N_i = n_0 B_{\text{DSB}} = 2n_0 W$

输入信噪比为: $\frac{S_i}{N_i} = \frac{E[f^2(t)]}{4n_0 W}$

所以, 信噪比增益为: $G_{\text{DSB}} = \frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = 2$

(2) SSB 调制相干解调

由于 $n_i(t) = n_I(t) \cos \omega_0 t - n_Q(t) \sin \omega_0 t$

所以有 $[s(t) + n_i(t)] \cos \omega_c t$
 $= [f(t) \cos \omega_c t / 2 - \hat{f}(t) \sin \omega_c t / 2 + n_I(t) \cos \omega_0 t - n_Q(t) \sin \omega_0 t] \cos \omega_c t$
 $= f(t) / 4 + f(t) \cos 2\omega_c t / 4 - \hat{f}(t) \sin 2\omega_c t / 4 + n_I(t) \cos(\omega_0 - \omega_c) t / 2$
 $+ n_I(t) \cos(\omega_0 + \omega_c) t / 2 - n_Q(t) \sin(\omega_0 - \omega_c) t / 2 - n_Q(t) \sin(\omega_0 + \omega_c) t / 2$

经低通后输出为: $s_o(t) + n_o(t) = f(t) / 4 + n_I(t) \cos(\pi W t) / 2 - n_Q(t) \sin(\pi W t) / 2$

输出信号功率为: $S_o = E[f^2(t)] / 16$

输出噪声功率为: $N_o = n_0 W / 4$

输出信噪比为: $\frac{S_o}{N_o} = \frac{E[f^2(t)]}{4n_0 W}$

输入信号功率为: $S_i = E[f^2(t)] / 4$

输入噪声功率为: $N_i = n_0 B_{\text{SSB}} = n_0 W$

信噪比增益为: $G_{\text{SSB}} = \frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = 1$

[例题] 对双边带信号和单边带进行相干解调, 接收信号功率为 2 mW, 噪声双边功率谱密度为 $2 \times 10^{-3} \mu\text{W/Hz}$, 调制信号是最高频率为 4 kHz 的低通信号。

(1) 比较解调器输入信噪比;

(2) 比较解调器输出信噪比。

解: SSB 信号的输入信噪比和输出信噪比分别为:

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{S_i}{n_0 B_{\text{SSB}}} = \frac{2 \times 10^{-3}}{2 \times 2 \times 10^{-3} \times 10^{-6} \times 4 \times 10^3} = \frac{1000}{8} = 125$$

$$\frac{S_o}{N_o} = G_{SSB} \frac{S_i}{N_i} = \frac{S_i}{N_i} = 125$$

DSB 信号的输入信噪比和输出信噪比分别为：

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{S_i}{n_0 B_{DSB}} = \frac{2 \times 10^{-3}}{2 \times 2 \times 10^{-3} \times 10^{-6} \times 2 \times 4 \times 10^3} = \frac{1000}{16} = 62.5$$

$$\frac{S_o}{N_o} = G_{DSB} \frac{S_i}{N_i} = 2 \times 62.5 = 125$$

$$\text{输入信噪比的比较为} \left(\frac{S_i}{N_i} \right)_{SSB} : \left(\frac{S_i}{N_i} \right)_{DSB} = 2:1$$

$$\text{输出信噪比的比较为} \left(\frac{S_o}{N_o} \right)_{SSB} : \left(\frac{S_o}{N_o} \right)_{DSB} = 1:1$$

计算结果说明两种信号的抗噪声性能一致。

第 9 课 线性调制系统的抗噪声性能

学习内容：角调制的基本概念 窄带角调制（窄带调频及窄带调相）

重点难点：调频信号的时域表达式及调频指数、最大频偏 窄带调频

教学方法：PPT

教学课时：2 课时

一、角调制的基本概念

对任意正弦信号，若有： $c(t) = A \cos[\theta(t)]$ ，则称之为调角信号。其中，

$$\theta(t) = \int \omega(t) dt$$

称为瞬时相角，而 $\omega(t) = d\theta(t)/dt$ 称之为瞬时频率。

角度调制信号的一般表达式为： $s(t) = A \cos [\omega_c t + \varphi(t) + \theta_0]$

式中， A ， ω_c 和 θ_0 均为常数。 $\varphi(t)$ 为瞬时相位偏移， $d\varphi(t)/dt$ 为瞬时频率偏移，

$$\varphi(t) + \theta_0$$

为瞬时相位，或相位。

设调制信号为 $f(t)$ ，则对于 $s(t) = A \cos [\omega_c t + \varphi(t) + \theta_0]$

若有 $\varphi(t) = K_{PM} f(t)$ ，则 $S(t)$ 为调相信号，其中 K_{PM} 为常数，它代表调相器的灵敏度，若初相为零，则

$s_{PM}(t) = A \cos [\omega_c t + K_{PM} f(t)]$ ，且有 $\theta(t) = \omega_c t + K_{PM} f(t)$

$$\text{此时 } \omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_c + K_{PM} \frac{df(t)}{dt}$$

若 $S(t)$ 为调频信号，则瞬时角频率偏移为 $\Delta\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = K_{FM} f(t)$

其中 K_{FM} 为频偏常数。

此时的瞬时角频率为： $\omega(t) = \omega_c + K_{FM} f(t)$

而瞬时相位为： $\theta(t) = \int \omega(t) dt = \omega_c t + K_{FM} \int f(t) dt$

所以调频信号为： $s_{FM}(t) = A \cos [\omega_c t + K_{FM} \int f(t) dt]$

设 $f(t) = A_m \cos \omega_m t$ ，若对载波调相，则有：

$$s_{PM}(t) = A \cos[\omega_c t + K_{PM} A_m \cos \omega_m t] = A \cos[\omega_c t + \beta_{PM} \cos \omega_m t]$$

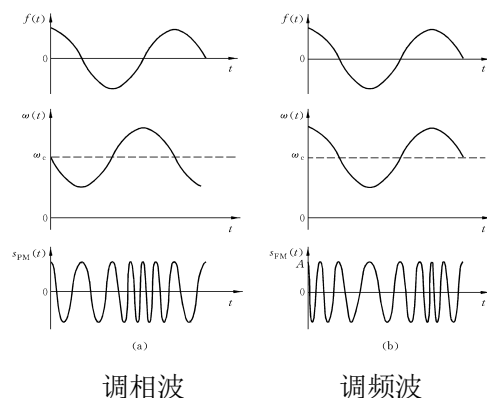
其中， $\beta_{PM} = K_{PM} A_m$ 称为调相指数。

若对载波调频，则有：

$$s_{FM}(t) = A \cos\left[\omega_c t + K_{FM} A_m \int \cos \omega_m t dt\right] = A \cos[\omega_c t + \beta_{FM} \sin \omega_m t]$$

其中， $\beta_{FM} = \frac{K_{FM} A_m}{\omega_m} = \frac{\Delta \omega_{\max}}{\omega_m} = \frac{\Delta f_{\max}}{f_m}$ 称为调频指数。

$\Delta \omega_{\max} = K_{FM} A_m$ 为最大角频偏，而 $\Delta f_{\max}$ 为最大频偏。



二、窄带角调制

认定窄带角调制条件为：

$$|K_{FM} \int f(t) dt|_{\max} \ll \frac{\pi}{6} \quad (\text{或 } 0.5)$$

$$|K_{PM} f(t)|_{\max} \ll \frac{\pi}{6} \quad (\text{或 } 0.5)$$

满足上述条件，则称之为窄带调频（或调相），记为 NBFM（或 NBPM）；不满足上述条件的，则称之为宽带调频（或调相），记为 WBFM（或 WBPM）。

（1）窄带调频

$$\begin{aligned} \text{FM 信号为: } s_{FM}(t) &= A \cos\left[\omega_c t + K_{FM} \int f(t) dt\right] \\ &= A \cos \omega_c t \cos\left[K_{FM} \int f(t) dt\right] - A \sin \omega_c t \sin\left[K_{FM} \int f(t) dt\right] \end{aligned}$$

当满足窄带调制条件时，有：

$$\sin\left[K_{FM} \int f(t) dt\right] \approx K_{FM} \int f(t) dt \quad \cos\left[K_{FM} \int f(t) dt\right] \approx 1,$$

$$\text{此时，有: } s_{NBFM}(t) \approx A \cos \omega_c t - \left[A K_{FM} \int f(t) dt\right] \sin \omega_c t$$

设 $f(t)$ 的频谱为 $F(\omega)$ ，且均值为 0，即 $F(0) = 0$ ，则有：

$$S_{NBFM}(\omega) = \pi A [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] + \frac{AK_{FM}}{2} \left[\frac{F(\omega - \omega_c)}{\omega - \omega_c} - \frac{F(\omega + \omega_c)}{\omega + \omega_c} \right]$$

可见，窄带调频的频谱有载波分量、边频分量，所以带宽是调制信号最高频率的两倍；但边频分量乘有

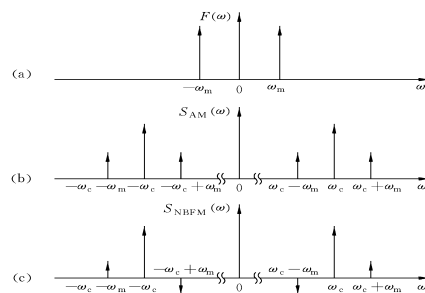
因子，所以有频谱失真，且上边频为负，与下边频反相。若 $f(t) = A_m \cos \omega_m t$ ，则 NBFM 信号为：

$$\begin{aligned} s_{\text{NBFM}}(t) &\approx A \cos \omega_c t - A \left[K_{\text{FM}} \int f(t) dt \right] \sin \omega_c t = A \cos \omega_c t - A A_m K_{\text{FM}} \frac{1}{\omega_m} \sin \omega_m t \sin \omega_c t \\ &= A \cos \omega_c t + \frac{A A_m K_{\text{FM}}}{2 \omega_m} [\cos (\omega_c + \omega_m) t - \cos (\omega_c - \omega_m) t] \end{aligned}$$

AM 信号为：

$$s_{\text{AM}}(t) = A \cos \omega_c t + \frac{A_m}{2} [\cos (\omega_c + \omega_m) t + \cos (\omega_c - \omega_m) t]$$

AM 与 NBFM 频谱图如下：



应该指出：为使 AM 波不致过调，边频幅度不得超过载频幅度之半；类似地，为使 NBFM 满足窄带条件，边频幅度应远小于载频幅度。

(2) 窄带调相

窄带调相可表示为： $s_{\text{NBPM}}(t) = A \cos [\omega_c t + K_{\text{PM}} f(t)] \approx A \cos \omega_c t - A K_{\text{PM}} f(t) \sin \omega_c t$

其频谱为： $S_{\text{NBPM}}(\omega) = \pi A [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] + \frac{j A K_{\text{FM}}}{2} [F(\omega - \omega_c) - F(\omega + \omega_c)]$

显然 NBPM 与 AM 相似，频谱中有载频和边频，所以带宽二者相等，只是 NBPM 信号频谱的正负边频要分别移相正负 90 度。

第 10 课 宽带角调制及调频信号的产生与解调

学习内容：宽带角调制（包括宽带调频和宽带调相） 调频信号的产生与解调

重点难点：宽带调频 调频信号的产生

教学方法：PPT

教学课时：2 课时

一、宽带调频

不满足窄带调频信号条件的为宽带调频。

设 $f(t) = A_m \cos \omega_m t = A_m \cos 2\pi f_m t$

则宽带调频信号为： $s_{\text{FM}}(t) = A \cos \left[\omega_c t + K_{\text{FM}} A_m \int \cos \omega_m t dt \right] = A \cos [\omega_c t + \beta_{\text{FM}} \sin \omega_m t]$

将上式两个因子分别展开成付氏级数，则有：

$$s_{\text{FM}}(t) = A \cos \omega_c t \cos (\beta_{\text{FM}} \sin \omega_m t) - A \sin \omega_c t \sin (\beta_{\text{FM}} \sin \omega_m t)$$

$$\cos(\beta_{FM} \sin \omega_m t) = J_0(\beta_{FM}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\beta_{FM}) \cos 2n \omega_m t$$

$$\sin(\beta_{FM} \sin \omega_m t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(\beta_{FM}) \sin(2n-1) \omega_m t$$

其中： $J_n(\beta_{FM})$ 称为第一类 n 阶贝塞尔函数，它是 n 和 β_{FM} 函数。

于是，有：

$$s_{FM}(t) = A \cos \omega_c t \left[J_0(\beta_{FM}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\beta_{FM}) \cos(2n \omega_m t) \right] - A \sin \omega_c t \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(\beta_{FM}) \sin(2n-1) \omega_m t \right]$$

利用三角公式，则可得式： $s_{FM}(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta_{FM}) \cos(\omega_c + n \omega_m)t$

其频谱为： $S_{FM}(\omega) = \pi A \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta_{FM}) [\delta(\omega - \omega_c - n \omega_m) + \delta(\omega + \omega_c + n \omega_m)]$

频谱特点：有载频，有上下边频 $\omega_c \pm n \omega_m$ ，边频幅度为 $A J_n(\beta_{FM})$ ， n 为奇数时，上下边频极性相反；

当 $\beta_{FM} \ll 1$ 时，只有 $J_0(\beta_{FM})$ 和 $J_1(\beta_{FM})$ 有值，其它 n 值时的 $J_n(\beta_{FM})$ 都接近于零，此时的信号只有载频和上下边频，这就是窄带调频。

$\beta_{FM} > 1$ 时，对应宽带调频。

调频信号的带宽一般以边频幅值高于未调载波幅值的 10% 为标准，于是，有下述近似计算公式：

$$B_{FM} = 2(1 + \beta_{FM}) f_m = 2 f_m + 2 \Delta f_{\max}$$

上述公式就是著名的卡森公式。

当 $\beta_{FM} \ll 1$ ，有： $B_{FM} \approx 2 f_m$ 。这就是 NBFM 的带宽。

当 $\beta_{FM} \gg 1$ ，有： $B_{FM} = 2(D_{FM} + 2) f_m$

若 f_m 保持不变而改变 $\Delta f_{\max}$ ，即改变 β_{FM} ，此时，调频信号的带宽将随 β_{FM} 的增加而加宽；如果保持 $\Delta f_{\max}$ 不变而改变 β_{FM} ，那么随着 β_{FM} 变大， f_m 将变小。此时，边频数目虽有增加，但间距却变小，因此有效带宽基本保持不变。

二、宽带调相

设 $f(t) = A_m \cos \omega_m t$ ，则调相信号为：

$$s_{PM}(t) = A \cos(\omega_c t + K_{PM} A_m \cos \omega_m t) = A \cos(\omega_c t + \beta_{PM} \cos \omega_m t)$$

其中 $\beta_{PM} = \left| \varphi(t) \right|_{\max} = \left| K_{PM} A_m \cos \omega_m t \right|_{\max} = K_{PM} A_m$ 为调相指数。

其最大角频偏为： $\Delta \omega_{\max} = \beta_{PM} \omega_m$

带宽为： $B_{PM} = 2(\beta_{PM} + 1) f_m$

当 $\beta_{PM} \gg 1$ 时， $B_{PM} \approx 2 \beta_{PM} f_m$

注意： $\beta_{PM} = K_{PM} A_m$ ，与 f_m 无关。即 PM 信号带宽随 f_m 的变化而变化，而 FM 信号则基本不变。

三、调频信号的产生

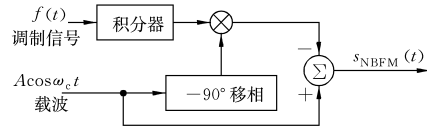
FM 信号的产生有直接调频法和倍频法两种。

直接调频又叫参数变值法，它是用调制信号直接控制电抗元件的参数，以改变输出信号瞬时频率，来实

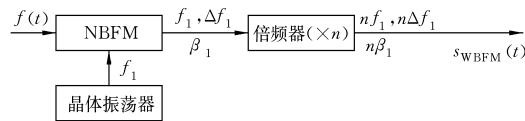
现调频的。实际中，常采用 VCO 作调制器。电抗元件可由变容二极管、电抗管、集成 VCO 及微波速调管等充当。

倍频法是先窄带调频再倍频以产生 WBFM 信号。

窄带调频原理如下图所示。



这里



倍频的目的是提高调频指数，其作用是使输出信号的频率为输入信号频率的某一给定倍数。以平方律器件为例，其 I/O 特性为： $s_o(t) = a s_i^2(t)$

当输入为 $s_i(t) = A \cos[\omega_c t + \varphi(t)]$ 时，输出为：

$$s_o(t) = a s_i^2(t) = a A^2 \cos^2[\omega_c t + \varphi(t)] = a A^2 / 2 + a A^2 \cos[2\omega_c t + 2\varphi(t)] / 2$$

滤除直流后，其相位偏移为： $2\varphi(t) = 2\beta_{FM} \sin \omega_m t$

若采用 n 倍频，则便可获得 n 倍的相位偏移。

四、调频信号的解调

调频信号的解调有相干与非相干解调两种方法。相干解调适合于窄带调频，而非相干解调既适合于窄带调频，也适合于宽带调频。

非相干解调是采用线性频率—电压转换特性以产生

AM—FM 波，再进行包络检波。

设输入信号为： $s_{FM}(t) = A \cos[\omega_c t + K_{FM} \int f(t) dt]$

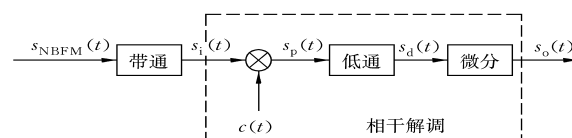
则解调器输出应为： $s_o(t) \propto K_{FM} f(t)$

微分器输出为： $s_d(t) = -A[\omega_c + K_{FM} f(t)] \sin[\omega_c t + K_{FM} \int f(t) dt]$

上式即为 AM—FM 信号。

包络检波后滤除直流，便可得 $s_o(t) = K_d K_{FM} f(t)$

相干解调原理见下图。



设 $s_{NBFM}(t) = A \cos \omega_c t - A [K_{FM} \int f(t) dt] \sin \omega_c t$ 及 $c(t) = -\sin \omega_c t$

则乘法器的输出为：

$$s_p(t) = -\left\{ A \cos \omega_c t - A \left[K_{FM} \int f(t) dt \right] \sin \omega_c t \right\} \sin \omega_c t$$

$$= -\frac{A}{2} \sin 2\omega_c t + \left[\frac{AK_{FM}}{2} \int f(t) dt \right] (1 - \cos 2\omega_c t)$$

经低通后输出为: $s_d(t) = \frac{AK_{FM}}{2} \int f(t) dt$

经微分器后输出为: $s_o(t) = \frac{AK_{FM}}{2} f(t)$

第 11 课 调频系统的抗噪声性能及频分复用

学习内容: 非相干解调的抗噪声性能 相干解调的抗噪声性能 频分复用

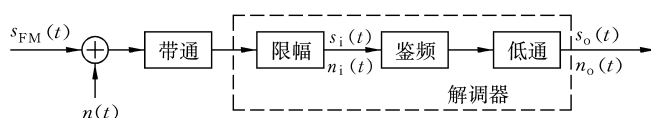
重点难点: 相干解调的抗噪声性能

教学方法: PPT

教学课时: 2 课时

一、非相干解调的抗噪声性能

分析模型见下图。



带通滤波器用于抑制带外噪声, 设信道引入的高斯白噪声的单边功率谱密度为 n_0 。

解调器输入信号为: $s_{FM}(t) = A \cos \left[\omega_c t + K_{FM} \int f(t) dt \right]$

输入信号平均功率为: $S_i = A^2 / 2$

输入噪声的平均功率为: $N_i = n_0 B_{FM}$

所以, 输入信噪比为: $\frac{S_i}{N_i} = \frac{A^2}{2n_0 B_{FM}}$

由于: $s_i(t) + n_i(t) = s_{FM}(t) + n_i(t) = A \cos [\omega_c t + \varphi(t)] + V(t) \cos [\omega_c t + \theta(t)]$

在高输入 SNR 时, 有 $A \gg V(t)$, 此时可得: $\psi(t) \approx \varphi(t) + \frac{V(t)}{A} \sin [\theta(t) - \varphi(t)]$

经微分器后, 输出为: $V_o(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt} + \frac{dn_d(t)}{dt} \frac{1}{2\pi A}$

这里: $n_d(t) = V(t) \sin [\theta(t) - \varphi(t)]$

输出信号功率为: $S_o = \frac{K_{FM}^2}{4\pi^2} \overline{f^2(t)} = \frac{K_{FM}^2}{4\pi^2} E[f^2(t)]$

输出噪声功率为: $N_o = \int_{-f_m}^{f_m} \frac{n_0 f^2}{A^2} df = \frac{2n_0 f_m^3}{3A^2}$

因此, 输出信噪比为: $\frac{S_o}{N_o} = \frac{3A^2 K_{FM}^2 E[f^2(t)]}{8\pi^2 n_0 f_m^3}$

由于 $\Delta f_{\max} = \frac{1}{2\pi} K_{\text{FM}} |f(t)|_{\max}$ ，所以 $K_{\text{FM}} = \frac{2\pi \Delta f_{\max}}{|f(t)|_{\max}}$

所以，有：
$$\frac{S_o}{N_o} = 3 \left(\frac{\Delta f_{\max}}{f_m} \right)^2 \frac{E[f^2(t)]}{|f(t)|_{\max}^2} \frac{A^2/2}{n_o f_m}$$

所以，信噪比增益为：
$$G_{\text{FM}} = \frac{S_o/N_o}{S_i/N_i} = 3 \left(\frac{\Delta f_{\max}}{f_m} \right)^2 \frac{E[f^2(t)]}{|f(t)|_{\max}^2} \left(\frac{B_{\text{FM}}}{f_m} \right)$$

当 $\Delta f_{\max} \gg f_m$ 时，有 $B_{\text{FM}} \approx 2 \Delta f_{\max}$ ，此时，有下式成立：

$$G_{\text{FM}} \approx 6 \left(\frac{\Delta f_{\max}}{f_m} \right)^3 \frac{E[f^2(t)]}{|f(t)|_{\max}^2} = 6 D_{\text{FM}}^3 \frac{E[f^2(t)]}{|f(t)|_{\max}^2}$$

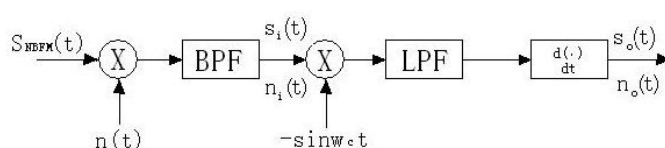
在单频调制时，还有下式成立：

$$\frac{E[f^2(t)]}{|f(t)|_{\max}^2} = \frac{1}{2} \quad B_{\text{FM}} = 2(1 + \beta_{\text{FM}}) f_m$$

所以， $G_{\text{FM}} = 3\beta_{\text{FM}}^2(1 + \beta_{\text{FM}})$

二、相干解调的抗噪声性能

窄带相干解调模型如下图所示。



$$\begin{aligned} s_i(t) + n_i(t) &= s_{\text{NBFM}}(t) + n_I(t) \cos \omega_c t - n_Q(t) \sin \omega_c t \\ &= [A + n_I(t)] \cos \omega_c t - [AK_{\text{FM}} \int f(t) dt + n_Q(t)] \sin \omega_c t \end{aligned}$$

经相干解调后，输出：
$$s_o(t) + n_o(t) = \frac{AK_{\text{FM}}}{2} f(t) + \frac{1}{2} \frac{dn_Q(t)}{dt}$$

所以输出信号功率为：
$$S_o = \frac{A^2 K_{\text{FM}}^2}{4} E[f^2(t)]$$

噪声的功率谱密度为：
$$P_o(f) = \frac{n_o \omega^2}{4} = n_o \pi^2 f^2$$

所以输出噪声功率为：
$$N_o = \int_{-f_m}^{f_m} P_o(f) df = \frac{2n_o \pi^2 f_m^3}{3}$$

因而，输出信噪比为：
$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{3A^2 K_{\text{FM}}^2 E[f^2(t)]}{8n_o \pi^2 f_m^3}$$

由于输入信噪比为: $\frac{S_i}{N_i} = \frac{A^2/2}{n_0 B_{\text{NBFM}}} = \frac{A^2/2}{2n_0 f_m}$

所以, 窄带调频信噪比增益为: $G_{\text{NBFM}} = \frac{S_o/N_o}{S_i/N_i} = \frac{3K_{\text{FM}}^2 E[f^2(t)]}{2\pi^2 f_m^2}$

由于 $\Delta f_{\text{max}} = \frac{1}{2\pi} K_{\text{FM}} |f(t)|_{\text{max}}$, 所以 $K_{\text{FM}} = \frac{2\pi \Delta f_{\text{max}}}{|f(t)|_{\text{max}}}$

故有: $G_{\text{NBFM}} = 6 \left(\frac{\Delta f_{\text{max}}}{f_m} \right)^2 \frac{E[f^2(t)]}{|f(t)|_{\text{max}}^2}$

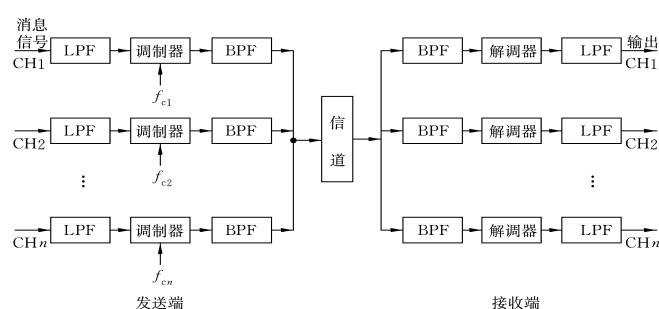
对于单频调制信号, $\frac{E[f^2(t)]}{|f(t)|_{\text{max}}^2} = \frac{1}{2}$, 并且对窄带调频而言, $\beta_{\text{FM}} = \Delta f_{\text{max}} / f_m$, 常取 $\beta_{\text{FM}} = 1/\sqrt{10}$

所以, 有: $G_{\text{NBFM}} \leq 0.3$

注意: 相干解调虽信噪比增益很低, 但不存在非相干解调的门限效应。

三、频分复用(FDM)

FDM 原理见下图。值得注意的是: 为确保各路间无干扰, 要求相邻载频间隔为 $\Delta B = B_s + B_g$



复合调制:

采用两种或两种以上调制方式的复用方式为复合调制。在模拟调制中, 通常是先进行 FDM, 再进行第二种调制; 而在数字调制中, 通常是先进行 TDM, 再进行第二种调制。

第 12 课 脉冲编码调制

学习内容: 脉冲编码调制的基本原理 抽样 (低通抽样、带通抽样、自然抽样、平顶抽样)

重点难点: 低通抽样 带通抽样

教学方法: PPT

教学课时: 2 课时

一、脉冲编码调制的基本原理

PCM 调制过程有抽样、量化和编码三个步骤。

电话语音信号的 PCM 码组由八位二进制组成, 模拟信号为调制信号, 二进制脉冲序列为载波, 样值改变脉冲序列的码元取值, 故称 PCM。

模拟信源给出要传输的模拟信号，预滤波器为带限滤波器，波形编码器完成的是将模拟信号变换成数字编码信号的变换，信号经传输到达接收端。在接收端再将数字编码信号转换成模拟信号。

二、抽样

(1) 低通抽样定理

通常进行等间隔 T 抽样；理论上，抽样过程 = 周期单位冲激脉冲 $\times$ 模拟信号；实际上，抽样过程 = 周期性单位窄脉冲 $\times$ 模拟信号；

抽样定理：只要采样频率 f_s 大于或等于被采样信号最高频率 f_H 的两倍，就可由采样信号不失真地还原被采样信号。

抽样信号可表示为： $x_s(t) = x(t)\delta_T(t)$

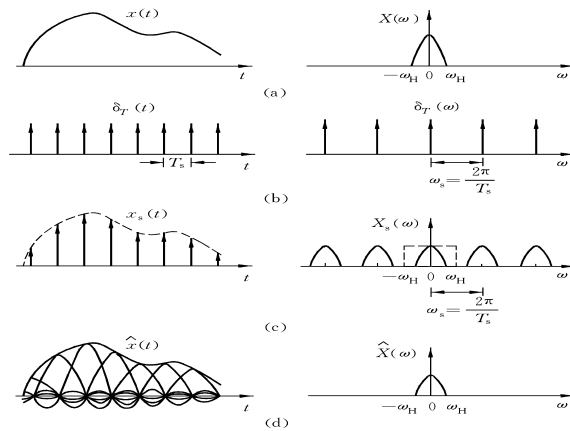
单位冲击函数可表示为： $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$

故有： $x_s(t) = x(t)\delta_T(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s)$

同时，由于 $\delta_T(\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$

所以， $X_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} [X(\omega) * \delta_T(\omega)] = \frac{1}{T_s} \left[X(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \right] = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s)$

抽样信号的时域与频域对照图如下图所示：



设理想低通传递函数为： $H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_H \\ 0, & |\omega| > \omega_H \end{cases}$

则滤波器输出为： $\hat{X}(\omega) = X_s(\omega)H(\omega) = X_s(\omega) \text{rect}(\omega / 2\omega_H) = \frac{1}{T_s} X(\omega)$

根据时域卷积定理，可获得重建信号：

$\hat{x}(t) = x_s(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) * \frac{1}{T_s} \left(\frac{\sin \omega_H t}{\omega_H t} \right) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \frac{\sin \omega_H (t - nT_s)}{\omega_H (t - nT_s)}$

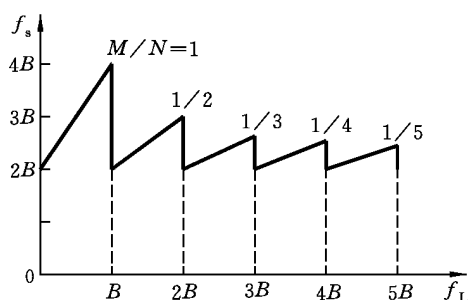
这样，通过内插抽样函数实现了被采样信号的恢复。

(2) 带通抽样定理

设带通信号有 $B = f_H - f_L$, $M = f_H / B - N$, N 为不超过 f_H / B 的最大正整数，则只要满足

$f_s = 2B \left(1 + \frac{M}{N} \right)$ ，就可利用带通滤波器不失真地恢复被采样信号。

由于 $0 \leq M < 1$ ，所以带通信号的抽样频率在 $2B$ 至 $4B$ 间变化，见图。



(3) 自然抽样

由于理想 $\delta_T(t)$ 不存在，所以设抽样脉冲序列为 $c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t - nT_s)$ ，则抽样信号为 $x_s(t) = x(t) \cdot c(t)$ 。

又因为 $c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_s t}$ ，其中 $C_n = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} p(t) e^{-jn\omega_s t} dt$ ，所以有： $x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) C_n e^{jn\omega_s t}$ 可

见， $X_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n X(\omega - n\omega_s)$

(4) 平顶抽样（有采保电路）

平顶抽样脉冲可表示为：
$$h(t) = \begin{cases} A, & |t| \leq \tau \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其传递函数为：
$$H(\omega) = A\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$$

由于 $x_{sf}(t) = x_s(t) * h(t)$ ，所以，有：

$$X_{sf}(\omega) = X_s(\omega) H(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s) A\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} = \frac{A\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s) \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$$

频谱中，有加权项 $\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$ ——孔径失真，为确保不失真地恢复，解调时应加 $\frac{\omega\tau/2}{\sin(\omega\tau/2)}$ 予以补偿。

第 13 课 均匀量化

学习内容：量化的基本原理 均匀量化和线性 PCM 编码

重点难点：量化的原理及 PCM 编码的输出信噪比

教学方法：PPT

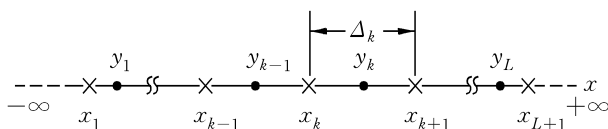
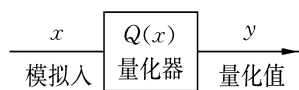
教学课时：2 课时

一、量化的基本原理

用有限位数字表示抽样值的过程即为量化。量化器的输入输出关系可表示为：

$$y_k = Q\{x_k \leq x < x_{k+1}\}, \quad k=1, 2, \dots, L$$

其中， y_k 为量化电平， x_k 为分层电平， $\Delta_k = x_{k+1} - x_k$ 为量化间隔。



量化特性曲线如下图所示：

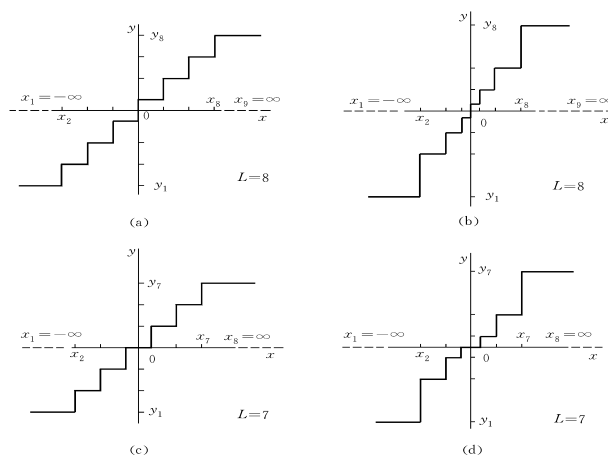


图 a 为均匀中升型；图 b 为非均匀中升型；图 c 为均匀中平型；图 d 为非均匀中平型。

量化器输入输出间的误差为量化误差，又叫量化噪声，并记之为： $q = x - y = x - Q(x)$

设输入信号的概率密度为 $p_x(x)$ ，则量化噪声的平均功率为：

$$\sigma_q^2 = E[x - Q(x)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [x - Q(x)]^2 p_x(x) dx$$

将上式分段计算，则有： $\sigma_q^2 = \sum_{k=1}^L \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - y_k)^2 p_x(x) dx$

当 $L \gg 1$ 时，有 $p_x(x) \approx p_x(x_k)$ ，当概率均匀分布时，取 $y_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$ ，又因为输入电平位于第 k 层的

概率为 $P_k \approx p_x(x_k) \Delta_k$ ，将上述关系代入量化噪声平均功率表达式，则有：

$$\sigma_q^2 = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^L P_k \Delta_k^2 = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^L p_x(x_k) \Delta_k^3$$

当 Δ_k 很小时， $\Delta_k = dx$ ，上式又可表示成： $\sigma_q^2 = \frac{1}{12} \int_{-V}^V \Delta_k^2(x) p_x(x) dx$

V 表示量化器的最大电平。当输入大于量化范围时，出现过载，这时，量化器保持 V 值，此时出现的噪声叫过载噪声。

过载噪声的功率为： $\sigma_{q0}^2 = \int_V^\infty (x-V)^2 p_x(x)dx + \int_{-\infty}^{-V} (x+V)^2 p_x(x)dx$

量化器总的量化噪声为： $N_q = \sigma_q^2 + \sigma_{q0}^2$

二、均匀量化和线性 PCM 编码

设量化器的量化范围为 $-V$ 到 V ，量化间隔数为 L ，则量化间隔为 $\Delta_k = \Delta = 2V/L$ 。正常时， $|q| \leq 0.5\Delta$ ，过载时， $|q| \geq 0.5\Delta$ 。所以均匀量化不过载噪声功率为：

$$\sigma_q^2 = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^L P_k \Delta_k^2 = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^L P_k \Delta^2 = \frac{\Delta^2}{12} \sum_{k=1}^L P_k$$

若信号不过载，则由于 $\sum_{k=1}^L P_k = 1$ ，所以，有： $\sigma_q^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{V^2}{3L^2}$

设输入是幅值为 A_m 的正弦信号，则其功率为 $S = A_m^2/2$ ，所以，其信噪比为：

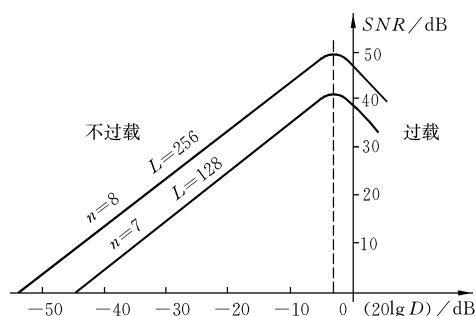
$$SNR = \frac{S}{N_q} = \frac{A_m^2/2}{V^2/(3L^2)} = \frac{3A_m^2 L^2}{2V^2} = \frac{3}{2} \left(\frac{A_m}{V} \right)^2 L^2$$

设 $L = 2^n$ ，并取 $D = A_m/(\sqrt{2}V)$ ，则可得下式： $SNR = 3D^2 L^2$ ，或写成：

$$[SNR]_{dB} = 10 \lg 3 + 20 \lg D + 20 \lg 2^n \approx 4.77 + 20 \lg D + 6.02n$$

当 $A_m = V$ ， $D = 1/\sqrt{2}$ 时，上式又可写成： $[SNR]_{\max dB} \approx 1.76 + 6.02n$

正弦信号线性 PCM 编码时的 SNR 特性曲线如下：



每增加一位编码，信噪比改善 6dB。当 $20 \lg D$ 取 -3 dB 时，对应信号过载点。

第 14 课 非均匀量化及差分脉冲调制

学习内容：非均匀量化的基本原理 对数量化及其折线近似 A 律 PCM 编码原理 差分脉冲调制 (DPCM)

重点难点：A 律 PCM 编码原理

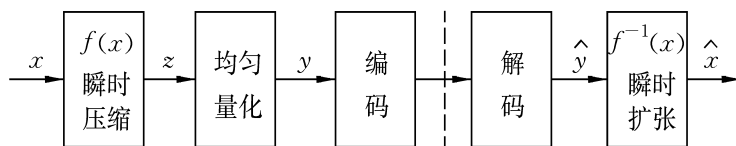
教学方法：PPT

教学课时：2 课时

一、非均匀量化的基本原理

由于语音信号动态范围一般在 $40 \text{ dB} \sim 50 \text{ dB}$ ，而 SNR 要求为 26 dB ，为保证 SNR 要求，编码位数太多会

使总码率太高，采用先压缩（动态范围）后扩张的非均匀量化方案，以减少编码位数。



二、对数量化及其折线近似

(1) A 律对数压缩特性

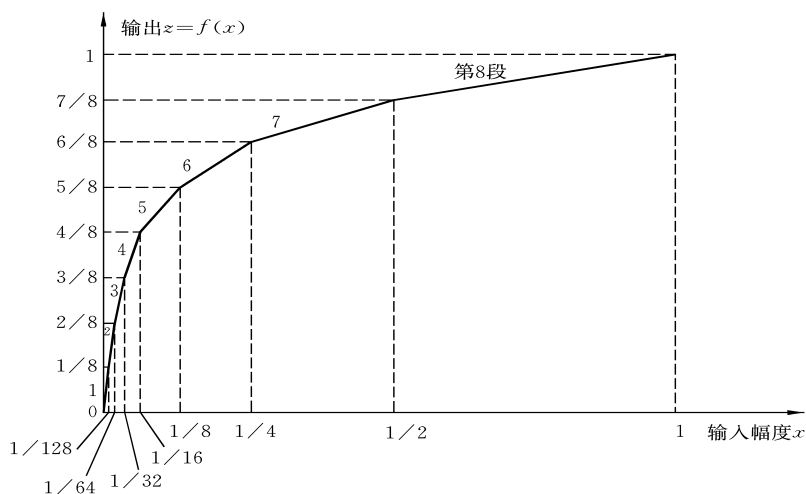
$$\text{设 } x = \frac{x_1}{V}, \text{ 则定义: } f(x) = \begin{cases} \frac{Ax}{1 + \ln A}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{A} \\ \frac{1 + \ln Ax}{1 + \ln A}, & \frac{1}{A} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

(2) μ 律对数压缩特性

$$\mu \text{ 律对数压缩特性定义为: } f(x) = \frac{\ln(1 + \mu x)}{\ln(1 + \mu)}$$

(3) A 律对数压缩特性的折线近似

参见下图。A 律 13 折逼近 A=87.6 的压缩特性。



三、A 律 PCM 编码原理

自然二进制码：十进制正整数的二进制表示；

折叠码：首位为极性码，其余七位为幅度码；

格雷码：相邻电平编码只有一位不同。

语音信号的 PCM 编码采用折叠码。

A 律 PCM 编码规则：

M1 M2 M3 M4 M5 M6 M7 M8

M1—极性码，1 为正，0 为负；

M2M3M4—段落电平码；

M5M6M7M8—段内电平码。

A 律正输入值编码表

	落码		码对应 始电平	内电平码对应的电平			
	M ₃	M ₄		M ₆	M ₇	M ₈	
	0	0	0	8	4	2	
	0	1	2	8	4	2	
	1	0	4	16	8	4	
	1	1	8	32	16	8	
	0	0	6	64	32	16	
	0	1	2	128	64	32	
	1	0	4	256	128	64	
	1	1	8	512	256	128	

[例题] 设输入为 $x=1260_{\Delta}$ ，按 A 律 13 折编码，求编码码组 C ，解码输出 $\hat{x}$ 和量化误差 q 。

解：(1) 因输入样值为正，故极性码 $M_1=1$ ；

因 $x > 1024_{\Delta}$ ，故段落码 $M_2 M_3 M_4=110$

又因为 $1260_{\Delta} - 1024_{\Delta} = 236_{\Delta}$ ，而 $236_{\Delta} < 512_{\Delta}$ ， $M_5 = 0$

$236_{\Delta} < 256_{\Delta}$ ， $M_6 = 0$ $236_{\Delta} > 128_{\Delta}$ ， $M_7 = 1$

$236_{\Delta} - 128_{\Delta} = 108_{\Delta} > 64_{\Delta}$ ， $M_8 = 1$

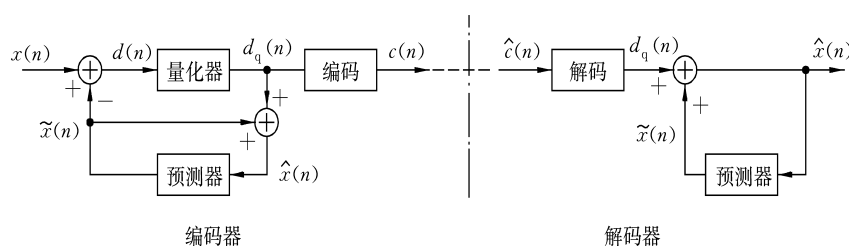
所以，编码码组 $C = 11100011$

(2) 解码输出： $\hat{x} = 1024_{\Delta} + 128_{\Delta} + 64_{\Delta} + 64_{\Delta} / 2 = 1248_{\Delta}$

(3) 量化误差： $q = 1260_{\Delta} - 1248_{\Delta} = 12_{\Delta}$ ， $12_{\Delta} < 64_{\Delta} / 2$ 即量化误差小于量化间隔一半。

四、差分脉冲调制 (DPCM)

DPCM 是根据信号样值间的关联性来进行编码的一种方法。其系统原理图见下图。



图中， $d(n) = x(n) - \tilde{x}(n)$ $\hat{x}(n) = \tilde{x}(n) + d_q(n)$ ，量化误差为 $e(n) = d(n) - d_q(n)$

所以系统 SNR 为：
$$SNR = \frac{E[x^2(n)]}{E[e^2(n)]} = \frac{E[x^2(n)]}{E[d^2(n)]} \frac{E[d^2(n)]}{E[e^2(n)]} = G_p \cdot SNR_q$$

上式中， $G_p = \frac{E[x^2(n)]}{E[d^2(n)]}$ ， $SNR_q = \frac{E[d^2(n)]}{E[e^2(n)]}$

第 15 课 增量调制及时分复用

学习内容：简单增量调制 自适应增量调制 时分复用技术

重点难点：简单增量调制原理 时分复用原理

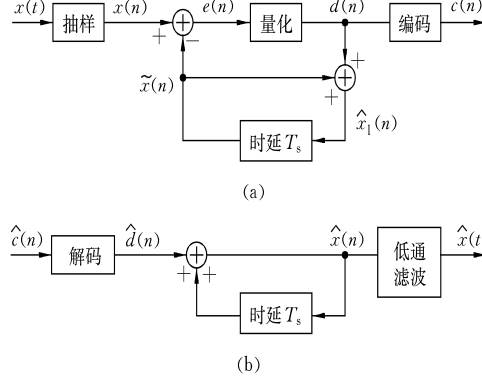
教学方法：PPT

教学课时：2 课时

一、增量调制（ ΔM ）

（1）简单增量调制

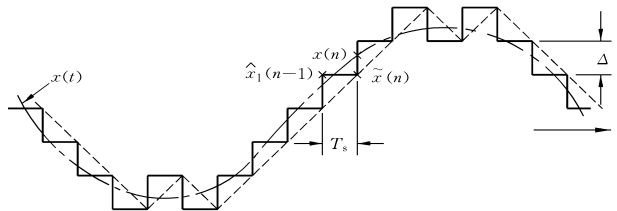
当 $f_s \gg f_{sN}$ 时，禾 $x(t)$ 时刻波形变化趋势，称为增量调制。如图所示



根据预测规则，有 $\tilde{x}(n) = \hat{x}_1(n-1)$ ，所以预测值与差值间的误差信号为：
 $e(n) = x(n) - \tilde{x}(n) = x(n) - \hat{x}_1(n-1)$ 。

量化器输出 $d(n)$ 只输出 $+\Delta$ 或 $-\Delta$ ，前者编为 1，后者编为 0， Δ 为 ΔM 的量化间隔。

由接收端可以看出， $\hat{x}(n) = \hat{d}(n) + \hat{x}(n-1)$ ，如果传输无误，则有： $\hat{x}(n) = \hat{x}_1(n)$ 。其实质是用阶梯波最佳逼近连续波，以跟踪波形斜率。



当连续波斜率太大时，预测信号跟不上信号的变化，此时会出现过载现象，见下图。为避免过载，应满足下列条件： $\left| \frac{dx(t)}{dt} \right| \leq \frac{\Delta}{T_s}$

如果输入信号为： $x(t) = A \sin \omega t$ ，则由于 $\frac{dx(t)}{dt} = A \omega \cos \omega t$ ，所以应满足 $A_{\max} \omega \leq \frac{\Delta}{T_s} = \Delta f_s$ ，或满

足： $A_{\max} \leq \frac{\Delta}{\omega T_s} = \frac{\Delta f_s}{\omega}$ ，其中 $A_{\max}$ 为正弦信号不过载最大振幅。

（2）自适应增量调制

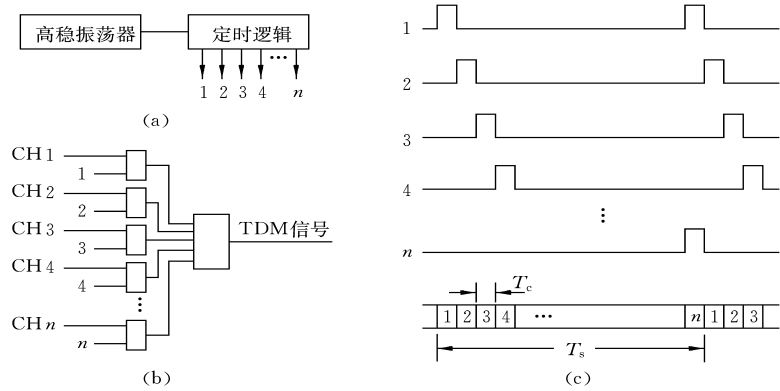
简单 ΔM 系统信号动态范围一般满足不了通信系统要求，为改进之，采用自适应增量调制。其原理是采用自适应方法使量阶 Δ 跟踪输入信号的统计特性而变化。若量阶能随信号瞬时压扩的，称之为瞬时压扩 ΔM ，

记为 ADM; 若量阶音节时间间隔 (5ms-20ms) 内信号平均斜率变化, 则称之为连续可变斜率 ΔM , 记为 CVSD。

二、时分复用 (TDM)

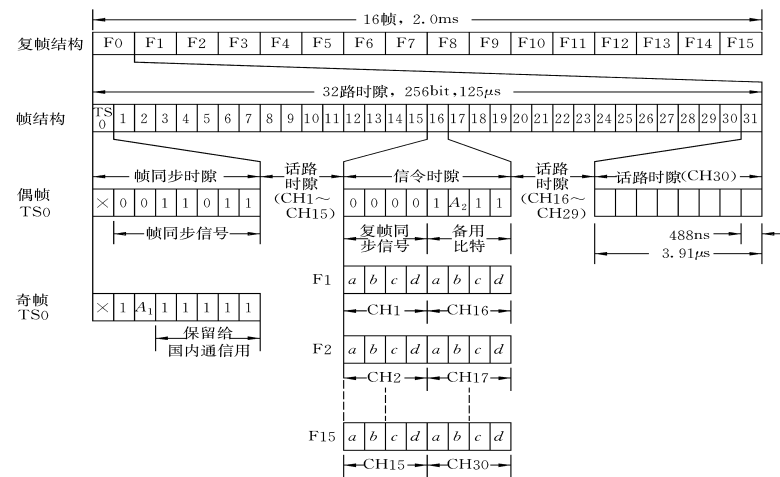
(1) 时分复用原理

时分复用原理见下图:



(2) PCM 基群帧结构

A 律 PCM 基群帧结构如下图所示:



这种帧结构中每帧有 32 路时隙, 只有 30 路时隙用来传输 30 路电话信号, 因此 A 律 PCM 基群又称为 30/32 路系统。

在 A 律 PCM 基群中, 帧周期为 125 us, 共有 $32 \times 8 = 256$ 个码元, 所以基群的信息速率

$$R_b = \frac{32 \times 8}{125 \times 10^{-6}} = 2048(kbit/s)$$

平均每路的信息速率为 $2048(kbit/s) / 32 = 64(kbit/s)$

第 16 课 数字基带信号的码型及功率谱

学习内容: 数字基带信号的码型 (设计原则、二码、三元码) 数字基带信号功率谱

重点难点: 二码以及三元码的波形绘制

教学方法: PPT

教学课时: 2 课时

一、数字基带信号的码型

(1) 数字基带信号的码型设计原则

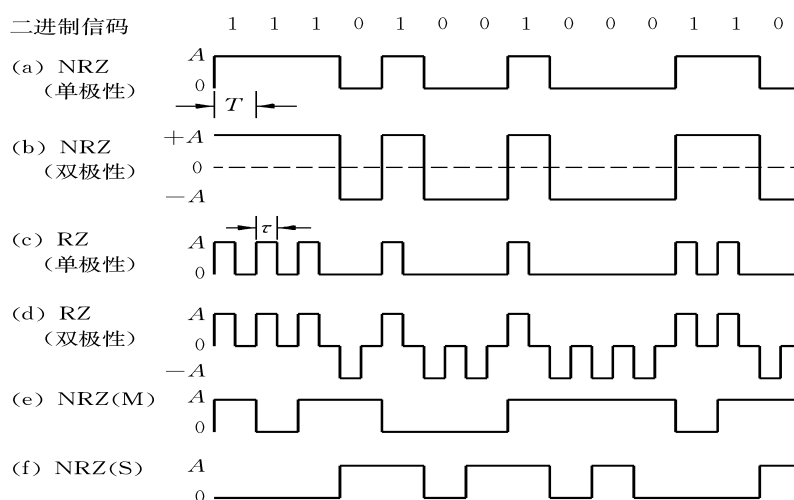
数字序列的基本单元叫码元，码元的脉冲表示叫数字基带信号，数字信号的直接数字基带信号传输叫数字基带传输，数字基带信号经调制后再传输叫数字信号的调制传输，数字基带信号电脉冲的形式叫码型，数字信息的电脉冲表示过程叫码型编码（或变换），在有线信道中传输的数字基带信号叫线路传输码型，由码型还原为数字信息叫码型译码。

选择码型应考虑的因素：

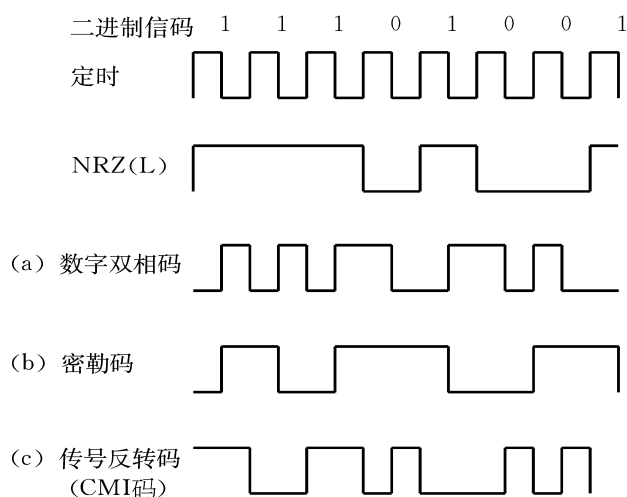
①对低频受限信道，码型应不含有直流，且低频成分小； ②在抗噪性能上，应不易产生误码扩散或增值； ③便于提取定时信息； ④尽量减少高频分量以节约频率资源减少串音； ⑤提高传输效率，并具有内在检错能力； ⑥编译码的设备力求简单。

(2) 二元码

常见的二元码波形有如下图所示几种。

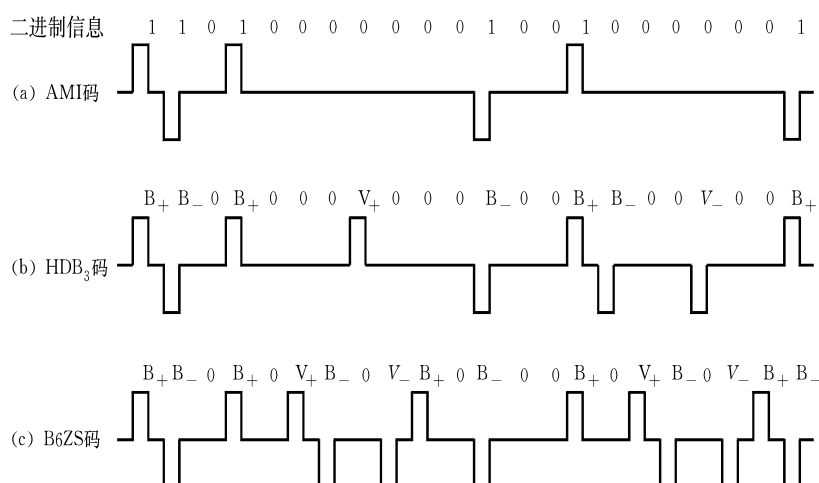


(a) 单极性非归零码 (NRZ) 有直流且有固定 0 电平； (b) 双极性非归零码 (NRZ) 无直流； (c) 单极性归零码 (RZ) 有直流且每一脉冲都归零，多用于近距离波形变换； (d) 双极性归零码 (RZ) 每一脉冲都归零，它用正负脉冲表示 1 和 0； (e) 传号差分码 (NRZ(M)) (电平改变示 1)； (f) 空号差分码 (NRZ(S)) (电平改变示 0)。



(a) 数字双相码：双极性方波 01 表示 1，10 表示 0； (b) 密勒码：码元中心沿变化表示 1，不变表示单 0 或码元间沿变化表示连 0； (c) 传号反转 (CMI) 码：用双极性 码 01 示 0，00 和 11 交替 表示 1。

(3) 三元码



(a) 传号反转交替 (AMI) 码：交替+1 和-1 示 1，0 示 0；

(b) n 阶高密度双极性 (HDBn) 码：改进的 AMI 码；每四个连 0 的第四个零用 V 替代，当两个 V 之间有奇数个 1 时，用 000V 置换四个连 0，这里 V 极性与前一个 1 相同，当两个 V 之间有偶数个 1 时，用 B00V 置换四个连 0，B 和 V 的极性与前一个 1 相反，B00V 码后的非 0 码与该 V 码极性相反。

二、数字基带信号的功率谱

对于收信者，接收信号为一随机脉冲序列，所以只能用功率谱来加以描述。

设二进制随机序列 1 的基本波形为 $g_1(t)$ ，0 的基本波形为 $g_2(t)$ ，且二者出现的概率分别为 P 和 1-P，则接收信号随机过程可表示为：
$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n(t)$$

$$\text{式中, } g_n(t) = \begin{cases} g_1(t - nT_s), & \text{以概率 } P \text{ 出现} \\ g_2(t - nT_s), & \text{以概率 } 1 - P \text{ 出现} \end{cases}$$

对于任意随机信号，都可表示为稳态分量和随机分量两部分，即： $g(t) = a(t) + u(t)$ 。

设 $g_1(t)$ 和 $g_2(t)$ 的付氏变换分别为 $G_1(f)$ 和 $G_2(f)$ ，则

$$a(t) \text{ 的功率谱为: } P_a(f) = |a_n|^2 \delta(f - nf_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |PG_1(nf_s) + (1-P)G_2(nf_s)|^2 \delta(f - nf_s)$$

$$u(t) \text{ 的功率谱为: } P_u(f) = \frac{1}{T_s} P(1-P) |G_1(f) - G_2(f)|^2$$

所以 $g(t)$ 的功率谱为 $P_a(f)$ 与 $P_u(f)$ 之和，当 0 和 1 等概率，即 $p=1/2$ 时，有：

$$P(f) = \frac{1}{4T_s} |G_1(f) - G_2(f)|^2 + \frac{1}{4T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |G_1(nf_s) + G_2(nf_s)|^2 \delta(f - nf_s)$$

第 17 课 无码间串扰的传输机制

学习内容：无码间串扰的传输条件 传输波形（理想低通信号 升余弦滚降信号）

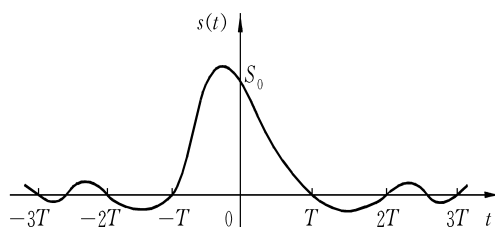
重点难点：无码间串扰的判断

教学方法：PPT

教学课时：2 课时

一、无码间串扰的传输条件

无码间串扰传输的充要条件是仅在本码元上有最大值，而对其它码元抽样时刻样值无影响，参见下图示波形。



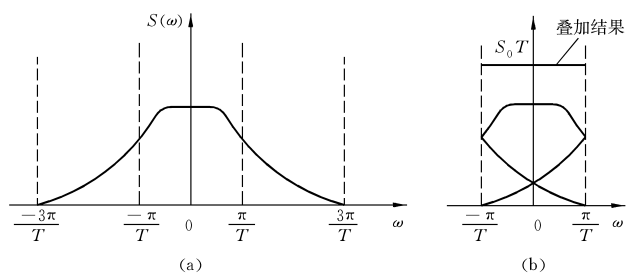
即当在时域上满足 $s(kT) = S_0 \delta(t)$ 时，抽样值是无码间串扰的。

由时域条件得到频域上满足抽样值无失真的充要条件为：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(\omega + \frac{2n\pi}{T}\right) = S_0 T, \quad -\frac{\pi}{T} \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$$

上述无失真充要条件被称之为奈奎斯特第一准则，其物理意义为：把传递函数分段平移到区间 $\left(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right)$

内，将它们叠加起来，叠加的结果为一常数。如下图所示：

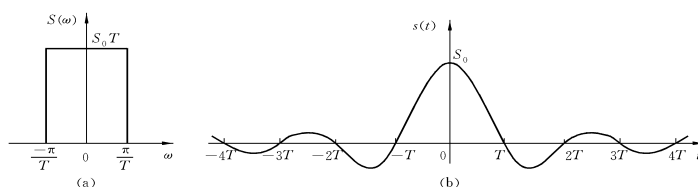


二、无码间串扰的传输波形

(1) 理想低通信号

如果成形网络满足： $S(\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| > \frac{\pi}{T} \\ S_0 T, & |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \end{cases}$ ，即为理想低通，相应地，其时域响应为： $s(t) = S_0 \text{Sa}\left(\frac{\pi t}{T}\right)$ ，

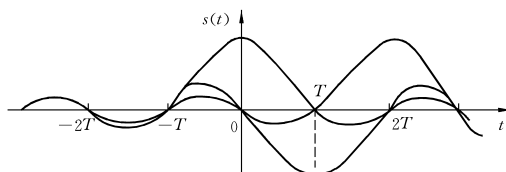
参见下述波形图：



频域传递函数

时域冲击响应

由图可见，在 $t = \pm nT (n \neq 0)$ 时刻有周期性零点，如果发送码元周期为 T ，就可做到无码间串扰。下图为无码间串扰示意图：



实际中，理想低通无法实现，所以其特性没有实际意义，但它给出了基带传输系统传输能力的极限值。

为说明传输系统带宽与码元速率间的关系，定义频带利用率为： $\eta_s = \frac{R_s}{B}$ ，单位为 Bd/Hz，即单位频带的码元传输速率。

对理想低通，码元速率为 $1/T$ ，所需带宽为 $1/2T$ ，通常，我们称 $1/2T$ 为奈氏带宽， T 为奈氏间隔。

频带利用率的另一种定义： $\eta_b = \frac{R_b}{B}$ ，单位为 bit/(s.Hz)。若码元序列为 M 进制码元，则频带利用率为： $2 \log_2 M$ bit/(s.Hz)。理想低通信号又称为具有最窄频带的无串扰波形。

(2) 升余弦滚降信号

升余弦信号的基带系统的传递函数为：

$$S(\omega) = \begin{cases} \frac{S_0 T}{2} \left\{ 1 - \sin \left[\frac{T}{2\alpha} \left(\omega - \frac{\pi}{T} \right) \right] \right\} & , \quad \frac{\pi(1-\alpha)}{T} \leq |\omega| \leq \frac{\pi(1+\alpha)}{T} \\ S_0 T, & 0 \leq |\omega| \leq \frac{\pi(1-\alpha)}{T} \\ 0, & |\omega| > \frac{\pi(1+\alpha)}{T} \end{cases}$$

这里， α 称为滚降系数，当 $\alpha=0$ 时，相当于理想低通； $\alpha=1$ 时，所需带宽为理想的 2 倍； $0<\alpha<1$ 时，带宽为 $B=(1+\alpha)/2T$ ，频带利用率为： $\eta=2/(1+\alpha)$ bit/(s·Hz)

第 18 课 数字信号基带传输的差错率及扰码

学习内容：数字信号基带传输的差错率 扰码

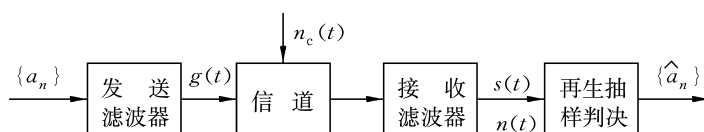
重点难点：扰码的原理

教学方法：PPT

教学课时：2 课时

一、数字信号基带传输的差错率

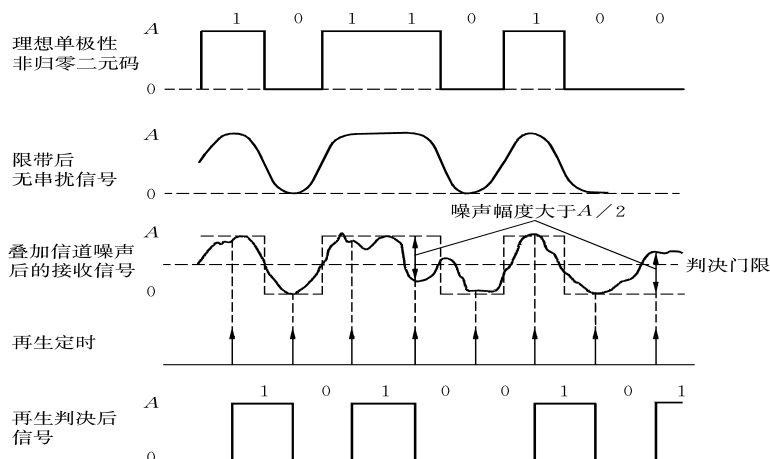
只考虑噪声的基带信号传输模型如下图所示：



接收滤波器输出为： $r(t) = s(t) + n(t)$

设发送信号为单极性 NRZ 二码，且 0 和 1 的幅值分别为 0 和 A ，并假设传输无损耗，则接收信号的抽样值为： $r(kT) = A + n(kT)$ 或 $r(kT) = n(kT)$

下面是再生判决的过程：



高斯噪声的幅度概率密度函数为： $p(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-n^2/(2\sigma^2)}$ ，发 0 时接收滤波器输出幅度概率密度函数为：

$p_0(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-r^2/(2\sigma^2)}$ ，发 1 时接收滤波器输出幅度概率密度函数为： $p_1(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(r-A)^2/(2\sigma^2)}$ ，0 码错

判为 1 码的概率为： $P_{b0} = \int_d^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-r^2/(2\sigma^2)} dr$ ，1 码错判为 0 码的概率为： $P_{b1} = \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(r-A)^2/(2\sigma^2)} dr$

设信源发 0 和 1 的概率分别为 P_0 和 P_1 ，则总误比特率为： $P_b = P_0 P_{b0} + P_1 P_{b1}$ ，通常 $P_0 = P_1 = 1/2$ ，所以，

有： $P_b = \frac{1}{2}(P_{b0} + P_{b1})$ 。

很明显，最佳判决门限应选为 $d=A/2$ ，因为此时总误比特率取最小值，且为： $P_b = \int_d^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-r^2/(2\sigma^2)} dr$ ，

作变量置换，设 $x = \frac{r}{\sigma}$ ，则 $dx = \frac{1}{\sigma} dr$ ，所以有： $P_b = \int_{d/\sigma}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = Q\left(\frac{d}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$

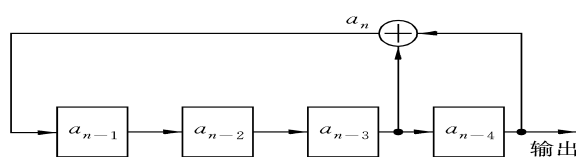
对于单极性 NRZ 信号，信号平均功率为 $S = A^2/2$ ，噪声平均功率为 $N = \sigma^2$ ，所以信噪比为 $\frac{S}{N} = \frac{A^2}{2\sigma^2}$ 。这时的误比特率为 $P_b = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{S}{2N}}\right)$ ；而双极性 NRZ 码的信号平均功率为 $S = A^2/4$ ，信噪比为 $\frac{S}{N} = \frac{A^2}{4\sigma^2}$ ，相应地，误比特率为 $P_b = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{S}{N}}\right)$ 。可见，相同的误比特

率，单极性二码要求信号平均功率比双极性二码高一倍。或者说，相同的信噪比，双极性二码的误比率低于单极性二码，且双极性二码具有稳定的 0 判决电平。

二、扰码

为解决信源的连 0 码提取定时信号难的问题，除采用码型编码外，还可用 m 序列扰码。

m 序列是一种最常见的伪随机序列它是最长线性反馈移位寄存器序列的简称，并具有最长周期。参见下图：



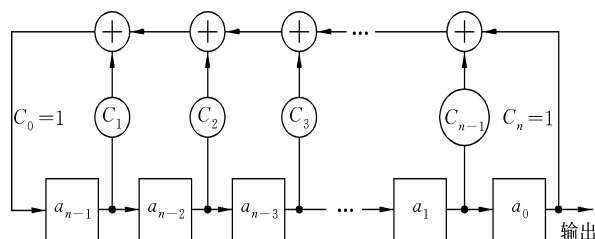
反馈逻辑符合下式： $a_n = a_{n-3} \oplus a_{n-4}$

任何一级寄存器的输出，在脉冲的触发下，都会产生一寄存器序列。参见 P206 之表 6-2。可见，该移位寄存器的状态具有周期性，且周期长度为 15。设初始状态为 0001，则得到的序列为：

$a_{n-4} = 000100110101111$

n 级线性反馈移位寄存器的输出是一周期序列，其周期长短取决于移位寄存器的级数、线性反馈逻辑和初始状态，但若周期最长，则初始状态非全 0 即可，关键是线性反馈逻辑。

一般形式的 n 级线性反馈移位寄存器见下图。



其反馈逻辑表达式为： $a_n = C_1 a_{n-1} \oplus C_2 a_{n-2} \oplus \dots \oplus C_n a_0 = \sum_{i=1}^n C_i a_{n-i} \pmod{2}$ ，其中， $C_i = 1$ 表示连线贯通，

$C_i = 0$ 表示连线断开。

设 $a_n = C_0 a_n (C_0 = 1)$ ，则有 $0 = \sum_{i=0}^n C_i a_{n-i}$ ，定义多项式 $F(x) = \sum_{i=0}^n C_i x^i$ ，其中 i 表示元素的位置。该

多项式称为线性反馈移位寄存器特征多项式。

可以证明，当 $F(x)$ 满足下列 3 个条件时，就一定能产生 m 序列：

- (1) $F(x)$ 是不可约的，即不能再分解因式；
- (2) $F(x)$ 可整除 $x^p + 1$ ，这里 $p = 2^n - 1$ ；
- (3) $F(x)$ 不能整除 $x^q + 1$ ，这里 $q < p$ 。

满足上述条件的称之为本原多项式，这样，产生 m 序列的充要条件就变成了寻找本原多项式问题。

例如，对 4 级移位寄存器，有 $p = 2^4 - 1 = 15$ ， $F(x)$ 应能整除 $x^{15} + 1$ ，而 $x^{15} + 1$ 可进行如下因式分解：

$$x^{15} + 1 = (x^4 + x + 1)(x^4 + x^3 + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)$$

由于 $x^5 + 1 = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x + 1)$ ，所以， $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ 不是本原多项式，而前两个因子都是，且是互逆的，找到了一个，另一个可直接写出来。

第 19 课 数字信号基带传输的差错率及扰码

学习内容：眼图的形成 均衡的原理

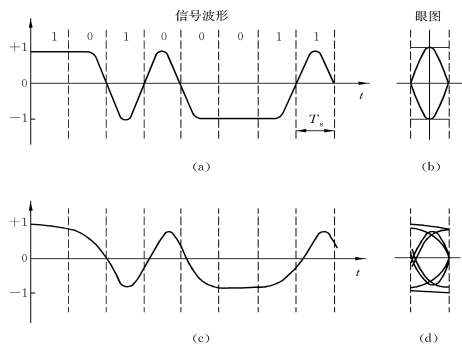
重点难点：均衡的原理

教学方法：PPT

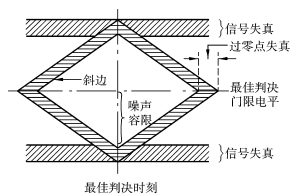
教学课时：2 课时

一、眼图

眼图是用简单方法和通用仪器观察系统性能的一种手段。其方法是：将接收到的待测基带信号加于示波器输入端，定时信号作为示波器扫描同步信号，这样示波器的扫描周期与信号的码元周期严格同步，示波器上就可见如同人眼的图形，谓之眼图。眼睛睁的越大，系统性能越好，反之眼睛睁的越小，系统性能越差。



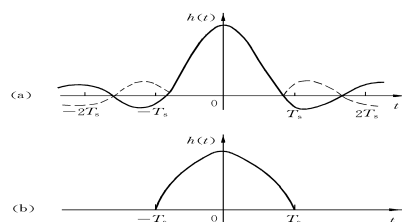
眼图模型如下图所示：



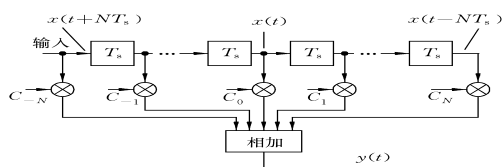
二、均衡

实际中，恒定特性的信道是不存在的，所以，码间串扰也是不可避免的。为此，往往需要加入可调滤波器，即均衡滤波器，以减少码间串扰。

如图，由于信道特性不理想，导致单个脉冲的响应在其它抽样值时刻产生拖尾，均衡网络用来产生虚线响应，使总响应成（b）状。



时域均衡就是在基带传输系统的接收滤波器之后加入横向滤波器。均衡器如图：



横向滤波器由延迟线、乘法器及加法器组成。

当激励为单位冲击信号时，设均衡中心抽头的响应为 $x(t)$ ，则均衡器输出为：
$$y(t) = \sum_{n=-N}^N C_n x(t - nT_s)$$

在抽样时刻 $t = kT_s$ 时为：
$$y(kT) = \sum_{n=-N}^N C_n x[(k-n)T_s]$$
，或简写成 $y_k = \sum_{n=-N}^N C_n x_{k-n}$ 。适当地选择加权系数，

使码间串扰最小。

定义峰值失真为：
$$D = \frac{1}{y_0} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} |y_k|$$
，显然，该比值越小，系统性能越好。同样地，定义均衡前的输入

峰值失真为 D_0 及均方失真 e ，它们的物理意义与峰值失真类似。

$$D_0 = \frac{1}{x_0} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} |X_k| \quad e^2 = \frac{1}{y_0^2} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} y_k^2$$

依峰值失真最小或均方失真最小设计系统使码间串扰最小，分别称之为最小峰值失真准则和最小均方失真准则。

根据最小失真准则，由于 $y_k = \sum_{n=-N}^N C_n x_{k-n}$ ，所以，当均衡到最佳程度时，有：

$$y_k = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k=\pm 1, \pm 2, \dots, \pm N \end{cases}$$

即选择一组系数 C_N ，以满足上式。由 y_k ($k=-N, -N-1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N$) 建立联立方程组，并求解之。

$$\begin{bmatrix} x_0 & x_{-1} & \cdots & x_{-2N} \\ x_1 & x_0 & \cdots & x_{-2N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_N & x_{N-1} & \cdots & x_{-N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{2N-1} & x_{2N-2} & \cdots & x_{-1} \\ x_{2N} & x_{2N-1} & \cdots & x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{-N} \\ C_{-N+1} \\ \vdots \\ C_0 \\ \vdots \\ C_{N-1} \\ C_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

这种使 y_k 除 $k=0$ 外皆为零设计出来的均衡器称为“迫零”均衡器。

第 20 课 二进制数字调制 (2ASK、2FSK)

学习内容：二进制幅度键控 (2ASK) 二进制移频键控 (2FSK)

重点难点：二进制幅度键控 (2ASK) 及二进制移频键控 (2FSK) 的波形绘制

教学方法：PPT

教学课时：2 课时

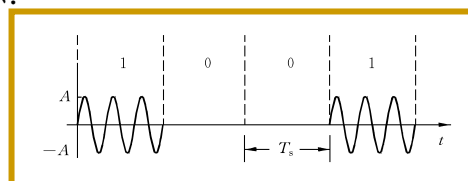
一、二进制幅度键控 (2ASK)

2ASK 信号，其幅度按调制信号取 0 或 1 有两种取值，最简单的形式为通断键控 (OOK)。

OOK 信号的表达式为： $s_{\text{OOK}}(t) = a_n A \cos \omega_c t$

调制信号 a_n 为： $a_n = \begin{cases} 1, & \text{出现概率为 } P \\ 0, & \text{出现概率为 } 1-P \end{cases}$

OOK 信号如下图所示：



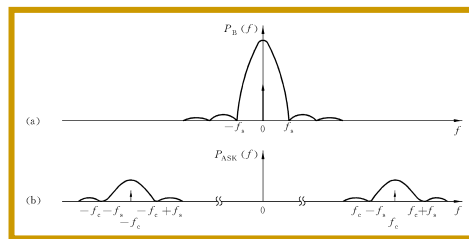
一般地，调制信号具有一定波形，可表示为： $B(t) = \sum_n a_n g(t - nT_s)$ ，所以，2ASK 信号为：

$s_{\text{ASK}}(t) = \left[\sum_n a_n g(t - nT_s) \right] \cos \omega_c t$ ，可见，2ASK 为 DSB 信号。

设调制信号功率谱为 $P_B(\omega)$ ，则 2ASK 信号功率谱为：

$$P_{\text{ASK}}(\omega) = \frac{1}{4} [P_B(\omega + \omega_c) + P_B(\omega - \omega_c)]$$

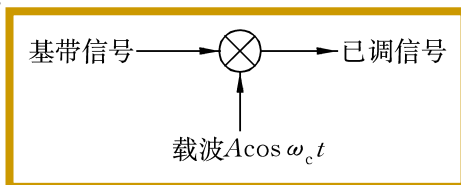
上式表明：2ASK 信号频带是二进制基带信号的二倍。如下图所示：



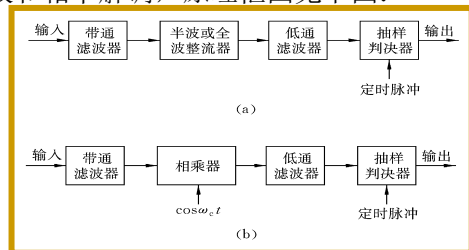
通常取第一个过零点带宽作为传输带宽，即谱零点带宽，则 OOK 信号的谱零点带宽为 $B_s = 2f_s$ 。

由于 f_s 与 R_s 相同，所以 OOK 信号的传输带宽为码元速率的二倍。为限制带宽，可采用带限的基带信号。如采用下图所示信号。

2ASK 调制器见下图：



解调方式：包络检波和相干解调，原理框图见下图：



二、二进制移频键控 (2FSK)

移频键控是数字信号改变载波频率。2FSK 载波频率随 0 和 1 有两种取值，分别为 f_1 和 f_2 。

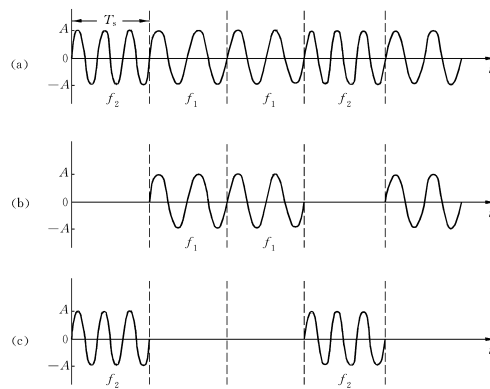
所以已调波的时域表达式可写成：

$$s_{2\text{FSK}}(t) = \left[\sum_n a_n g(t - nT_s) \right] \cos \omega_1 t + \left[\sum_n \bar{a}_n g(t - nT_s) \right] \cos \omega_2 t$$

$$\text{其中, } a_n = \begin{cases} 0, & \text{概率为 } P \\ 1, & \text{概率为 } 1-P \end{cases} \quad \bar{a}_n = \begin{cases} 1, & \text{概率为 } P \\ 0, & \text{概率为 } 1-P \end{cases}$$

$$2\text{FSK 还可表示成: } s_{2\text{FSK}}(t) = \begin{cases} s_1(t) = A \cos 2\pi f_1 t \\ s_2(t) = A \cos 2\pi f_2 t \end{cases}$$

2FSK 信号的波形及分解如下图所示：

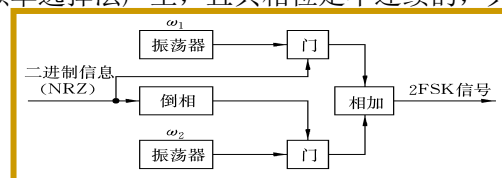


设 2FSK 两个载频的中心频率为 f_c ，频差为 Δf ，则 $\Delta f = f_2 - f_1$ $f_c = (f_1 + f_2)/2$

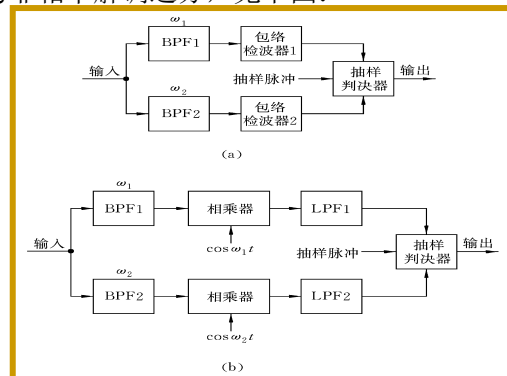
定义调频指数（频移指数）为：
$$h = \frac{f_2 - f_1}{R_s} = \frac{\Delta f}{R_s}$$

2FSK 信号带宽可近似为 $B_{2FSK} \approx 2B_B + |f_2 - f_1|$ 。

通常，2FSK 信号由频率选择法产生，且其相位是不连续的，其调制器可参见下图：

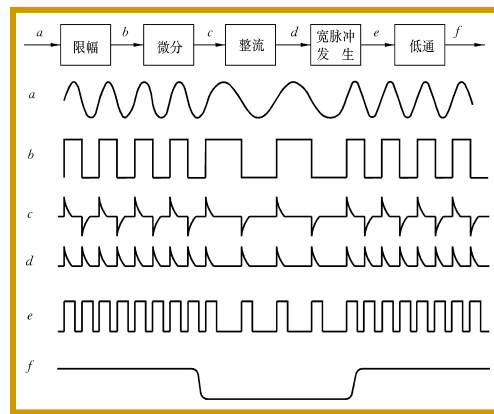


2FSK 解调也有相干与非相干解调之分，见下图：



(a) 图中，是把 2FSK 看成为两个独立的 2ASK 信号，然后分别加以解调，解调后再合成。

过零解调也是 2FSK 信号一种常见的解调方法，见下图。其原理是：载频不同，过零点数不同，检测过零点，即可进一步得到原始的调制信号。



第 21 课 二进制数字调制（2PSK、2DPSK）

学习内容：二进制相移键控（2PSK） 二进制差分相移键控（2DPSK）

重点难点：二进制幅度键控（2PSK）及二进制移频键控（2DPSK）的波形绘制

教学方法：PPT

教学课时：2 课时

一、二进制相移键控（2PSK）

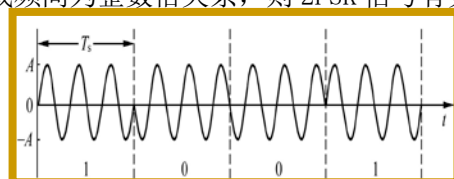
相移键控是利用数字信号去控制载波的相位，对二进制，相位只有两种取值，通常为 0 和 π 。所以称之为二相键控。

$$2\text{PSK 信号表达式: } s_{2\text{PSK}}(t) = \left[\sum_n a_n g(t - nT_s) \right] \cos \omega_c t$$

$$\text{其中, } a_n = \begin{cases} +1, & \text{概率 } P \\ -1, & \text{概率 } 1 - P \end{cases}$$

若 $g(t)$ 是幅度为 1 宽度为 T_s 的矩形脉冲，则 2PSK 信号可表示为 $s_{2\text{PSK}}(t) = \pm \cos \omega_c t$

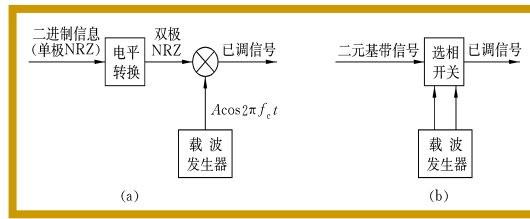
如果 $R_s = 1/T_s$ ，与载频间为整数倍关系，则 2PSK 信号有如下波形：



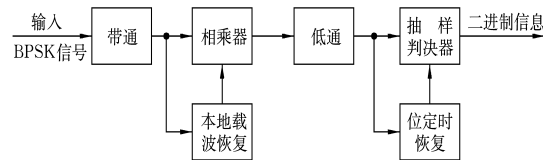
2PSK 与 2ASK 在表达式形式上是一致的，但 2ASK 调制信号为单极性脉冲，而 2PSK 为双极性脉冲，且二者皆为 DSB，只是 2PSK 没有载频离散谱成分。

2PSK 解调可用乘法器，或用相位选择器，如下图所示。

由于 PSK 信号频谱中没有载频，解调必须用相干解调方法，而此时如何获得同频同相的载频就成了关键问题。



2PSK 相干解调器如下图所示：

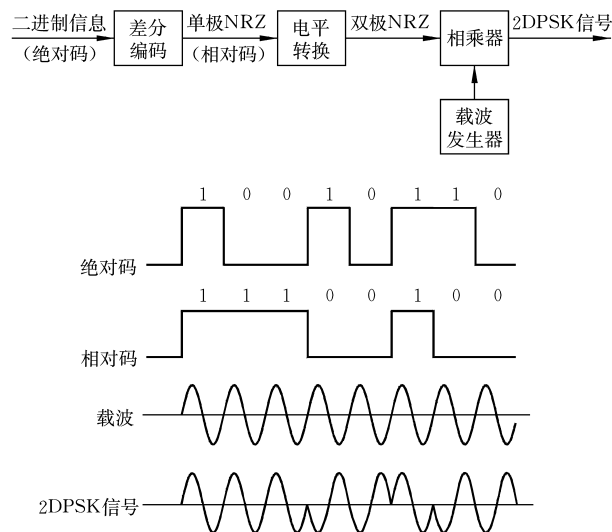


2PSK 调制与解调过程如下：

信码 a_n	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1
码元相位 φ	0	π	0	0	π	0	π	π	0	0	0
本地载波相位 φ_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
本地载波相位 φ_2	π	π	π	π	π	π	π	π	π	π	π
$[\varphi \cdot \varphi_1]$ 极性	+	-	+	+	-	+	-	-	+	+	+
$[\varphi \cdot \varphi_2]$ 极性	-	+	-	-	+	-	+	+	-	-	-
$\hat{a}_{n1}$	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1
$\hat{a}_{n2}$	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0

二、二进制差分相移键控（2DPSK）

为避免绝对调相存在的问题，引入相对调相，即 2DPSK，其原理及波形见图：



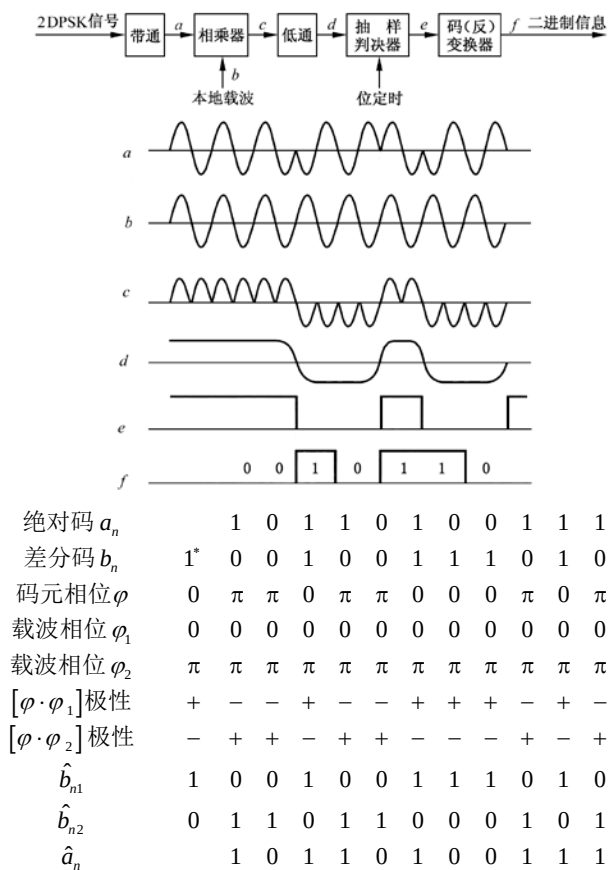
差分码可取传号差分也可取空号差分，传号差分的编码规则为： $b_n = a_n \oplus b_{n-1}$

其中， b_{n-1} 的初始值可以任意设定。

差分译码规则为： $\hat{a}_n = \hat{b}_n \oplus \hat{b}_{n-1}$

显然，只要传输没有差错，则译码值便是原始数据，即 $\hat{a}_n = a_n$ 。

2DPSK 相干解调器及各点波形如下图所示：



第 22 课 二进制数字调制的抗噪声性能

学习内容：ASK 系统、FSK 系统、2PSK 和 2DPSK 的抗噪声性能

重点难点：抗噪声性能的分析方法

教学方法：PPT

教学课时：2 课时

一、ASK 系统的抗噪声性能

(1) 相干接收时 ASK 系统的误比特率

为方便，设 2ASK 信号如下式，并设信号传输无损耗。

$$s_{2\text{ASK}}(t) = \begin{cases} A \cos \omega_c t, & a_n = 1 \\ 0, & a_n = 0 \end{cases}$$

信道噪声经 BPF 后输出为窄带高斯噪声，且为： $n_1(t) = n_I(t) \cos \omega_c t - n_Q(t) \sin \omega_c t$

当发送 0 时，BPF 输出为： $x(t) = A \cos \omega_c t + n_1(t) = [A + n_I(t)] \cos \omega_c t - n_Q(t) \sin \omega_c t$

经与相干载波相乘，再经低通，解调器输出为： $y(t) = A + n_I(t)$

其一维概率密度函数为 $p_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(y-A)^2/2\sigma^2}$

同理，当发送 0 时，解调器输出的一维概率密度函数为 $p_0(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-y^2/2\sigma^2}$

当发送 0 和 1 等概时，解调错判的概率（即误比特率）为：

$$P_b = \frac{1}{2} \int_{V_T}^{\infty} p_0(y) dy + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{V_T} p_1(y) dy$$

当最佳判决门限确定在 $V_T = A/2$ 时, 有: $P_b = \int_{V_T}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-y^2/2\sigma^2} dy$

$$\text{令 } z = y/\sigma, \text{ 则 } dz = dy/\sigma, \text{ 则有: } P_b = \int_{A/2\sigma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

$$\text{设峰值信噪比为 } r = \frac{A^2/2}{\sigma^2}, \text{ 则 } P_b = Q\left(\sqrt{\frac{r}{2}}\right).$$

(2) 非相干 ASK 的误比特率

当发送信号不为 0 时, 包络检波器输入信号为:

$$x(t) = A\cos\omega_c t + n_I(t)\cos\omega_c t - n_Q(t)\sin\omega_c t = R\cos[\omega_c t + \varphi(t)]$$

包络 R 的概率部分符合莱斯分布, 即: $p_1(R) = \frac{R}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{(R^2 + A^2)}{2\sigma^2}\right] I_0\left(\frac{AR}{\sigma^2}\right), \quad R \geq 0$

当发送信号为 0 时, 包络 R 符合瑞利分布, 即: $p_0(R) = \frac{R}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right), \quad R \geq 0$

当 0 和 1 等概发送时, 平均误比特率为: $P_b = \frac{1}{2} \int_{V_T}^{\infty} p_0(R) dR + \frac{1}{2} \int_0^{V_T} p_1(R) dR$

当判决门限为两条线的交点时, 有: $V_T \approx \frac{A}{2} \left(1 + \frac{8\sigma^2}{A^2}\right)^{1/2}$, 所以, 有下式成立:

$$P_b \approx \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{A^2}{8\sigma^2}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

在信噪比很高的条件下, 即接收信噪比为 $r = \frac{A^2/2}{\sigma^2}$, 进一步有: $P_b \approx \frac{1}{2} e^{-r/4}$

二、FSK 系统的抗噪声性能

(1) 相干 FSK 的误比特率

$$2\text{FSK 信号可表示为: } s_{2\text{FSK}}(t) = \begin{cases} A\cos\omega_1 t, & a_n = 1 \\ A\cos\omega_2 t, & a_n = 0 \end{cases}$$

相干 FSK 的误比特率为:

$$P_b = \int_{A/\sqrt{2}\sigma^2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = Q\left(\frac{A}{\sqrt{2}\sigma^2}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{2\sigma^2}}\right) = Q(\sqrt{r})$$

(2) 非相干 FSK 的误比特率

$$P_b = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{A^2}{4\sigma^2}\right) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{r}{2}\right)$$

这里 $r = \frac{A^2/2}{\sigma^2}$ 为接收信噪比。

三、2PSK 和 2DPSK 的抗噪声性能

由于 PSK 是 DSB 信号，所以必须用相干解调方法。相干 PSK 的误比特率为：

$$P_b = \int_{A/\sigma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{\sigma^2}}\right)$$

DPSK 系统的误比特率为： $P_b = \frac{1}{2} e^{-r}$ ，这里，引入了接收信噪比 $r = \frac{A^2/2}{\sigma^2}$ 。

第 23 课 数字信号的最佳接收

学习内容：使用匹配滤波器的最佳接收机 相关接收机

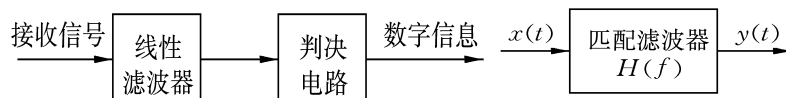
重点难点：匹配滤波器的原理

教学方法：PPT

教学课时：2 课时

一、使用匹配滤波器的最佳接收机

最佳接收应该使判决尽可能正确，以获得最小的差错率，见下图：



假如滤波器能在判决瞬间给出最大信号功率，并将噪声最大的抑制，则差错率一定最小。

上右图示滤波器为一匹配滤波器。

滤波器的输入信号为：

则滤波器的输出信号为： $x(t) = s(t) + n(t)$

其中信号输出为： $y(t) = [s(t) + n(t)] * h(t)$

输出噪声平均功率为： $y_s(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)H(f)e^{j2\pi f t} df$

设 $t = t_m$ 时刻输出信号最大，则此时输出 SNR 为： $SNR = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} S(f)H(f)e^{j2\pi f t_m} df \right|^2}{\frac{n_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df}$

满足上述关系的 $H(f)$ 正是所要求的传递函数。

根据许瓦兹不等式，有： $\left| \int_{-\infty}^{\infty} A(f)B(f)df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |A(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |B(f)|^2 df$

上式中，只有在 $A(f) = kB^*(f)$ ， k 为任意常数时取等号。因此，令：

$$A(f) = H(f) \quad B(f) = S(f)e^{j2\pi f t_m}$$

$$\text{则有: } SNR \leq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df}{\frac{n_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df} = \frac{2}{n_0} \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df$$

上式取等号时, 必须满足: $H(f) = KS^*(f)e^{-j2\pi f t_m}$, 式中, $K = 2k/n_0$ 。

可见, 传递函数应与信号频谱的复共扼成正比, 故称匹配滤波器。

由付氏反变换, 可得匹配滤波器的冲击响应:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} KS^*(f)e^{-j2\pi f t_m} e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{\infty} KS^*(f)e^{-j2\pi f (t_m - t)} df$$

当输入为实信号时, 有 $S^*(f) = S(-f)$, 所以,

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} KS(-f)e^{-j2\pi f (t_m - t)} df = Ks(t_m - t)$$

显然, $h(t)$ 是 $s(t)$ 的纵轴镜像 $s(-t)$ 延迟了 t_m 。

由于要求物理可实现, 所以要求 $t_m \geq T$ 。通常取 $t_m = T$, 所以, $h(t) = Ks(T - t)$, 这时, 匹配滤波器的输出信号为:

$$y_s(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t - \tau)h(\tau) d\tau = K \int_{-\infty}^{\infty} s(t - \tau)s(T - \tau) d\tau$$

令 $u = t - \tau$, 则有: $y_s(t) = K \int_{-\infty}^{\infty} s(u)s(t - T + u) du = KR(t - T)$

由此可见, 匹配滤波器的输出信号与输入信号的自相关函数成正比。

当 $t = T$ 时, 有 $y_s(T) = KR(0) = KE_s$ 。

上式说明, 匹配滤波器输出信号的最大值与输入信号波形无关, 而与其能量有关。

从频域角度看, 也可导出同样的结论。

$$y_s(t) = K \int_{-\infty}^{\infty} S^*(f)e^{-j2\pi f T} S(f)e^{j2\pi f t} df = K \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df = KE_s$$

由帕什瓦尔定理, 可知, 信号能量为:

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df$$

代入许瓦兹不等式, 得匹配滤波器输出最大信噪比为:

$$SNR = \frac{2}{n_0} \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df = \frac{2E_s}{n_0}$$

上式表明: 滤波器在 $t = T$ 时刻的输出 SNR 与输入信号能量成正比, 与输入噪声功率谱密度成反比。

二、相关接收机

时间有限信号, 频谱必无限, 所以, 匹配滤波器不能做到全频段匹配。

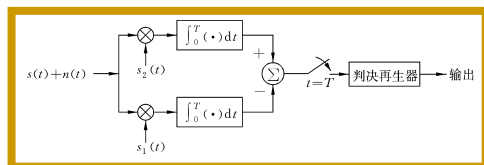
由于滤波器输入信号为: $x(t) = s(t) + n(t)$

而输出信号在 $t = T$ 时刻为: $y(t) = \int_0^T x(\tau)h(T - \tau) d\tau$

设 $h(t) = s_2(T - t) - s_1(T - t)$, 并取 t 不在 $(0, T)$ 时, $h(t) = 0$, 则有:

$$y(t) = \int_0^T x(\tau) [s_2(\tau) - s_1(\tau)] d\tau = \int_0^T x(\tau) s_2(\tau) d\tau - \int_0^T x(\tau) s_1(\tau) d\tau$$

两个函数相乘后再积分的运算为相关运算，所以，由这种运算得到的接收机称为相关最佳接收机，其原理框图如下图所示。



第 24 课 差错控制编码的基本概念

学习内容：差错控制方式 差错控制编码分类 几种简单的检错码 检错与纠错基本原理

重点难点：差错控制方式 检错与纠错的基本原理

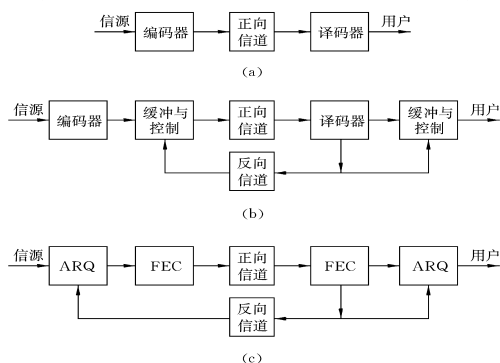
教学方法：PPT

教学课时：2 课时

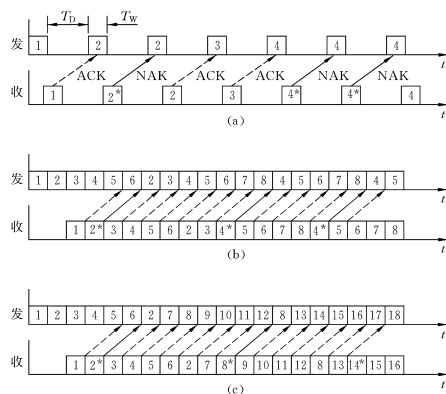
一、差错控制方式

常用的差错控制方式有三种：

- (a) 前向纠错 (FEC)：发送能纠错的码，译码时纠错，适合单向信道和一发多收系统；
- (b) 检错重发 (ARQ)：收到错码后，通过反向信道通知发端重发，直到正确接收为止；
- (c) 混合纠错 (HEC)：先用前向纠错，当前向纠错不能解决问题时，再用检错重发。



检错重发的三种方式：



二、差错控制编码分类

- (1) 按信息码和附加监督码间的检验关系可分为线性码和非线性码。若监督码是信息码的线性组合，称为线性码。反之，称之为非线性码。
- (2) 按信息码和监督码间的约束方式可分为分组码和卷积码。它是在编码前先把信息序列分为 k 位一组，然后附加 m 位监督码，形成 $n = k + m$ 位的码组。监督码仅与本码组的信息码有关，称之为分组码；若监督码与之前的若干个信息码组的码元有约束关系，称之为卷积码或连环码或链码。

三、几种简单的检错码

(1) 奇偶监督码

设码组长为 n ，且为： $a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}\cdots a_0$

则偶校验时有： $a_0 \oplus a_1 \oplus \cdots \oplus a_{n-1} = 0$

奇校验时有： $a_0 \oplus a_1 \oplus \cdots \oplus a_{n-1} = 1$

(2) 二维奇偶监督码

一行的 n 列中增加一位监督码，

一列的 m 行中增加一位监督码。

该码可检错可纠错，尤其可检突发错码。

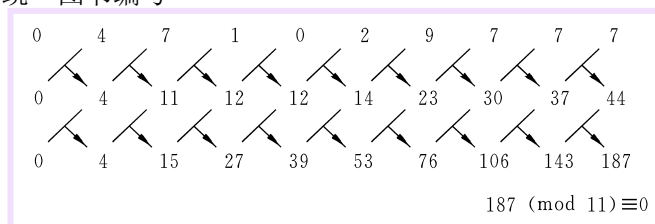
(3) 重复码

重复码是在每位信息码元之后，再简单重复多次的编码。

(4) 恒比码

从固定码长码组中选那些 1 和 0 比例恒定的码组作为许用码组，如五单位保护电码等。

(5) ISBN 国际统一图书编号



四、检错与纠错的基本原理

差错编码的思想是在被传输的信息中附加监督码，用信息冗余度来实现检错和纠错的。

例如：000、001、010、011、100、101、110、111 用来传递信息，则无法检错；

000、011、101、110 用来传递信息可以检一位错，但无法纠错；

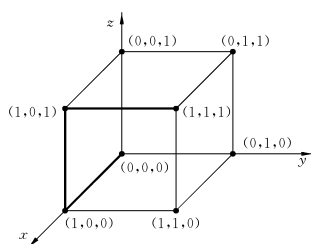
000、111 用来传递信息可以检一位或两位错码，还可以纠一位错码。

可见，码组间的差异与纠错能力十分重要。

定义 1：码组中非零码元的数目称为码组的重量，简称码重。

定义 2：两码组中对应码位上具有不同码元的数目称为两码组的码距，又叫汉明距。

选择下图的三种编码组合，其汉明距分别为 1, 2, 3。



对于分组码，一般有如下结论：

- (1) 在一个码组内检测 e 个误码，要求 $d_{\min} \geq e+1$ ；
- (2) 在一个码组内纠正 t 个误码，要求 $d_{\min} \geq 2t+1$ ；
- (3) 在一个码组内纠正 t 个误码，同时检测 $e(e \geq t)$ 个误码，要求 $d_{\min} \geq t+e+1$ 。

差错控制编码提高了通信系统的可靠性，也降低了有效性。为衡量有效性，定义编码效率 $R_c = k/n$ 。

其中， k 是编码前码组中的码元数，即信息码元数； n 是编码后码组中的码元数，它包含了校验码元。

第 25 课 线性分组码及循环码

学习内容：线性分组码 循环码

重点难点：线性分组码及循环码的编码规则

教学方法：PPT

教学课时：2 课时

一、线性分组码

线性码组中的监督码是信息码元的线性组合，线性码具有封闭性，即任意两个许用码组之和（模 2 加），结果仍为一许用码组。

设 n 位分组码用 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 表示， k 位信息码用 $d_1, d_2, \dots, d_k$ 表示，记该码组为 (n, k) 码。

将码组和信息码组用行矩阵和表示出来，则有：

$$\mathbf{C} = [c_1, c_2, \dots, c_n] \quad \mathbf{D} = [d_1, d_2, \dots, d_k]$$

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= d_1 \\ c_2 &= d_2 \\ &\vdots \\ c_k &= d_k \\ c_{k+1} &= h_{11}d_1 \oplus h_{12}d_2 \oplus \dots \oplus h_{1k}d_k \\ c_{k+2} &= h_{21}d_1 \oplus h_{22}d_2 \oplus \dots \oplus h_{2k}d_k \\ &\vdots \\ c_n &= h_{m1}d_1 \oplus h_{m2}d_2 \oplus \dots \oplus h_{mk}d_k \end{aligned} \right\}$$

写成矩阵形式，有 $\mathbf{C} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{G}$ ， $\mathbf{G}$ 为生成矩阵，且：

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{11} & h_{21} & \cdots & h_{m1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & h_{12} & h_{22} & \cdots & h_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & h_{1k} & h_{2k} & \cdots & h_{mk} \end{bmatrix}$$

设

$$I_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} & \cdots & h_{m1} \\ h_{12} & h_{22} & \cdots & h_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{1k} & h_{2k} & \cdots & h_{mk} \end{bmatrix}$$

$$\text{则 } C = D[I_k, P] = [DI_k, DP] = [D, DP] = [D, C_m]$$

其中前 k 位 D 为信息位，后 m 位 C_m 为监督位。

编码前，信息码元有 k 位，编码组合有 2^k 种，编码后，码组有 m 位，编码组合有 2^m 种，很显然， $2^m > 2^k$ ，找到合适的 P 矩阵，使编码前后的码组一一对应起来，同时具有较强的纠检错能力的 P 矩阵是我们要做的工作。

数学上已经证明：线性码的最小码距刚好等于其非零码的码重。

找到最小码距就可计算该码的纠检错能力。

二、循环码

循环码是一种系统分组码，前 k 位是信息码，后 r 位是监督码。不仅具有封闭性，还具有循环性，即一许用码组经循环移位后得到另一个许用码组。

设 $C = [c_1, c_2, \dots, c_n]$ 是一个循环码组，则可将之表示为：

$$c(x) = c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \cdots + c_n$$

上式称为码多项式。

码组 C 移位 1 次得到的仍是码组，它可写成：

$$c^{(1)}(x) = c_2x^{n-1} + c_3x^{n-2} + \cdots + c_nx + c_1$$

不难验证： $x \cdot c(x) = c_1x^n + c_2x^{n-1} + \cdots + c_nx = c_1(x^n + 1) + c^{(1)}(x)$

类似地，码组 C 经 i 次移位后，得到的新的码组 $c^{(i)}(x)$ 是 $x^i \cdot c(x)$ 除以 $(x^n + 1)$ 的余式。

也就是说，在模 $(x^n + 1)$ 意义下，若 $c(x)$ 是码多项式，则 $x^i \cdot c(x)$ 都是码多项式。

循环码的编码过程也可用多项式来描述。

一个 k 位信息码组 $D = [d_1, d_2, \dots, d_k]$ 用信息多项式表述出来，则有：

$$d(x) = d_1x^{k-1} + d_2x^{k-2} + \cdots + d_k$$

编码问题就是求解码组多项式 $c(x)$ 的问题。

设 $c(x) = d(x) \cdot g(x)$ ，这里 $g(x)$ 是 $(x^n + 1)$ 的 $n - k$ 次因式，称为生成多项式。所以，有：

$$c(x) = d_1x^{k-1}g(x) + d_2x^{k-2}g(x) + \cdots + d_kg(x)$$

由于 $x \cdot c(x) = x \cdot d(x) \cdot g(x)$

而前已证明： $x \cdot c(x) = c_1(x^n + 1) + c^{(1)}(x)$

显然, $c^{(1)}(x) = d_1(x)g(x)$

上式表明: $d_1(x)$ 对应某个信息码组, 就是说 $c(x)$ 一定是循环码组。或者说, 循环码完全由其码组长度 n 及生成多项式 $g(x)$ 所决定。由于 $g(x)$ 是一个能除尽 $(x^n + 1)$ 的 $n - k$ 次多项式, 所以对 $(x^n + 1)$ 进行因式分解, 便可得到相应的 $g(x)$ 。

通常, 由信息码组 D 和生成多项式求出的码组不是系统码。根据系统码的定义, 码组的前 k 位是信息码, 后 m 位是校验码。

用多项式表示为: $c(x) = x^{n-k}d(x) + R(x)$

又因为 $c(x) = d_1(x)g(x)$, 所以, 有: $x^{n-k}d(x) + R(x) = d_1(x)g(x)$ 或写成: $x^{n-k}d(x) = d_1(x)g(x) + R(x)$

因此, 有: $\frac{x^{n-k}d(x)}{g(x)} = d_1(x) + \frac{R(x)}{g(x)}$

可见, $R(x) = \text{rem} \left[\frac{x^{n-k}d(x)}{g(x)} \right]$ 。

鉴于本资料不断发现被转卖/盗卖/分享/转赠, 这是对我们劳动成果的亵渎, 因此我们极不愿意但却不得不做恶毒的申明以保护我们资料的价值; 保证从我们处购买该资料用户的权益 (付出的价格)。

申 明

本资料由职场精英工作室所有 (唯一旺旺客服: 蔚蓝小小天使); 我们祝所有从这两处购买资料的用户顺利通过各个公司招聘笔试面试取得心仪offer, 一堆offer, 高大上的offer。祝所有从别处购买/分享获得/获赠该资料的用户笔试面试通通挂掉, 祝所有转卖/盗卖/分享/转赠我们资料的商家/机构全家人间灭绝, 户口销户