

Ch2. 网孔分析和节点分析

◆ 本章内容:

1. 熟练掌握电路方程的列写方法:

节点电压法

网孔(回路)电流法

2. 了解含运算放大器的电路的分析方法

3. 互易定理, 电路的对偶性

Ch2. 网孔分析和节点分析

◆ 分析方法

为了求得全部支路的电压和电流,不同的方法得到的电路方程个数不同。

电路方程的列写方法

2b法: 联立**2b**个方程, 同时求解电流和电压

支路分析法: 联立**b**个方程, 先求解电流或电压
是否可进一步减少联立方程数?

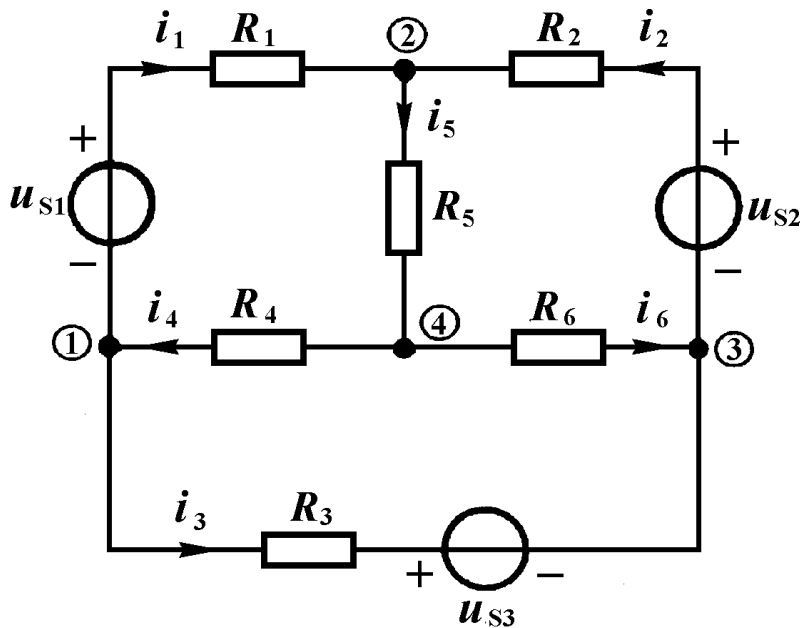


两个独立性约束

网孔分析法

网孔电流

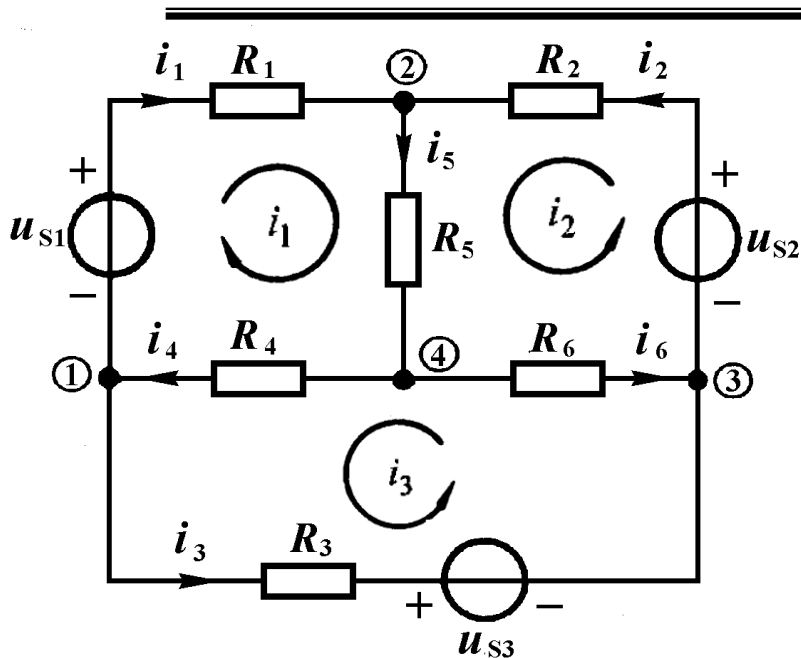
若将电压源和电阻串联作为一条支路时，该电路共有6条支路和4个结点。对①、②、③结点写出KCL方程。



$$\left\{ \begin{array}{l} i_1 + i_3 - i_4 = 0 \rightarrow i_4 = i_1 + i_3 \\ -i_1 - i_2 + i_5 = 0 \rightarrow i_5 = i_1 + i_2 \\ i_2 - i_3 - i_6 = 0 \rightarrow i_6 = i_2 - i_3 \end{array} \right.$$

支路电流 i_4 、 i_5 和 i_6 可以用另外三个支路电流 i_1 、 i_2 和 i_3 的线性组合来表示。

网孔分析法

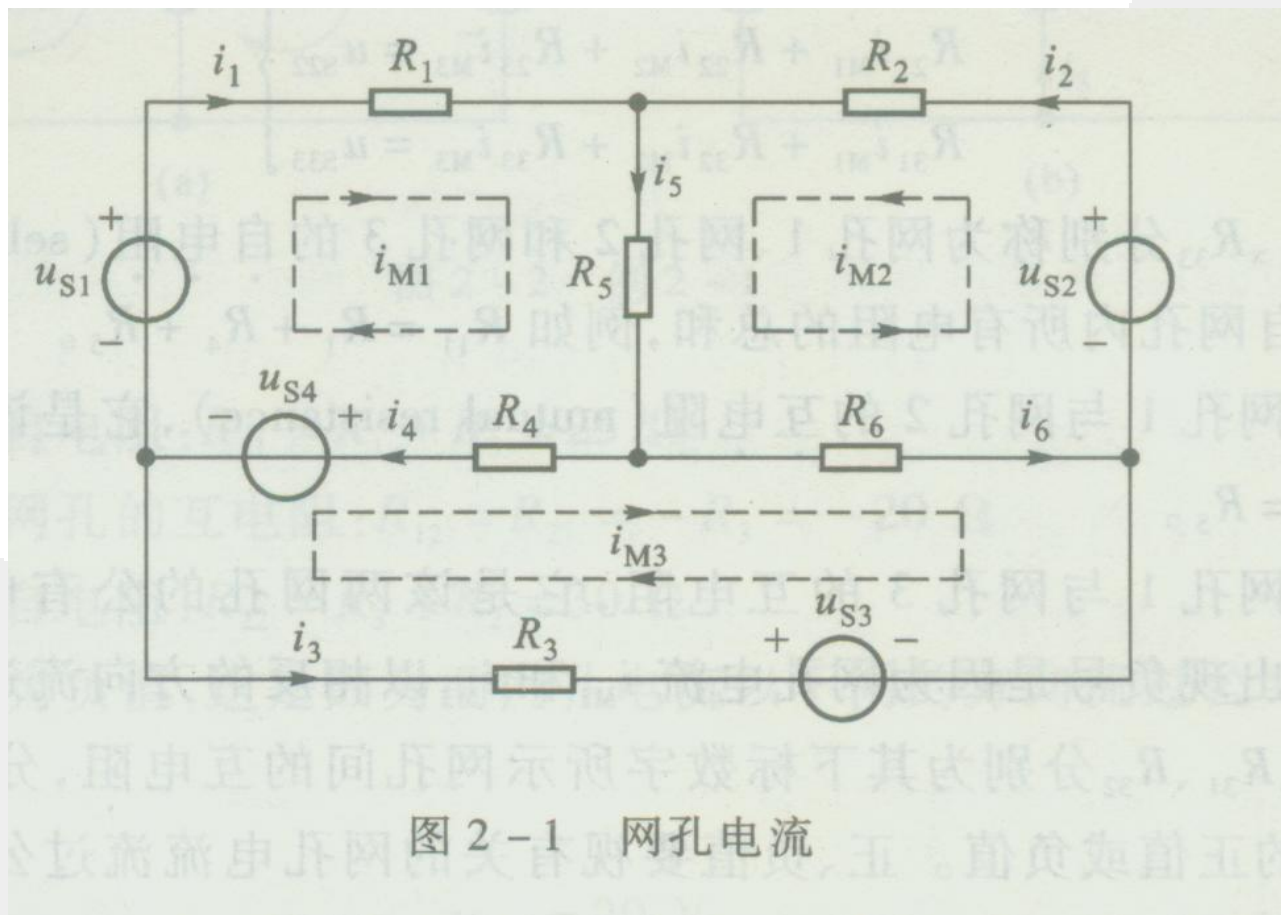


$$\begin{cases} i_1 + i_3 - i_4 = 0 \rightarrow i_4 = i_1 + i_3 \\ -i_1 - i_2 + i_5 = 0 \rightarrow i_5 = i_1 + i_2 \\ i_2 - i_3 - i_6 = 0 \rightarrow i_6 = i_2 - i_3 \end{cases}$$

电流 i_4 、 i_5 和 i_6 是非独立电流，它们由独立电流 i_1 、 i_2 和 i_3 的线性组合确定。这种线性组合的关系，可以设想为电流 i_1 、 i_2 和 i_3 沿每个网孔边界闭合流动而形成，如图中箭头所示。这种在网孔内闭合流动的电流，称为网孔电流。它是一组能确定全部支路电流的独立电流变量。

网孔分析法

思想：以网孔电流为求解对象，列写KVL方程。



$b-n+1$ 个网孔电流即是一组独立电流变量

网孔分析法

网孔电流法的独立方程数为 **$b-(n-1)$** 。与支路电流法相比，方程数可减少 **$n-1$** 个。

$$\left. \begin{aligned} R_1 i_{M1} + R_5 i_{M1} + R_5 i_{M2} + R_4 i_{M1} - R_4 i_{M3} + u_{S4} - u_{S1} &= 0 \\ R_2 i_{M2} + R_5 i_{M2} + R_5 i_{M1} + R_6 i_{M2} + R_6 i_{M3} - u_{S2} &= 0 \\ R_3 i_{M3} + R_4 i_{M3} - R_4 i_{M1} + R_6 i_{M3} + R_6 i_{M2} - u_{S4} - u_{S3} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{电压与回路绕行方} \\ \text{向一致时取“+”；} \\ \text{否则取“-”。} \end{array}$$

整理得

$$\left. \begin{aligned} (R_1 + R_4 + R_5) i_{M1} + R_5 i_{M2} - R_4 i_{M3} &= u_{S1} - u_{S4} \\ R_5 i_{M1} + (R_2 + R_5 + R_6) i_{M2} + R_6 i_{M3} &= u_{S2} \\ -R_4 i_{M1} + R_6 i_{M2} + (R_3 + R_4 + R_6) i_{M3} &= u_{S4} + u_{S3} \end{aligned} \right\}$$

网孔分析法

上面的式子经过观察可表示成如下

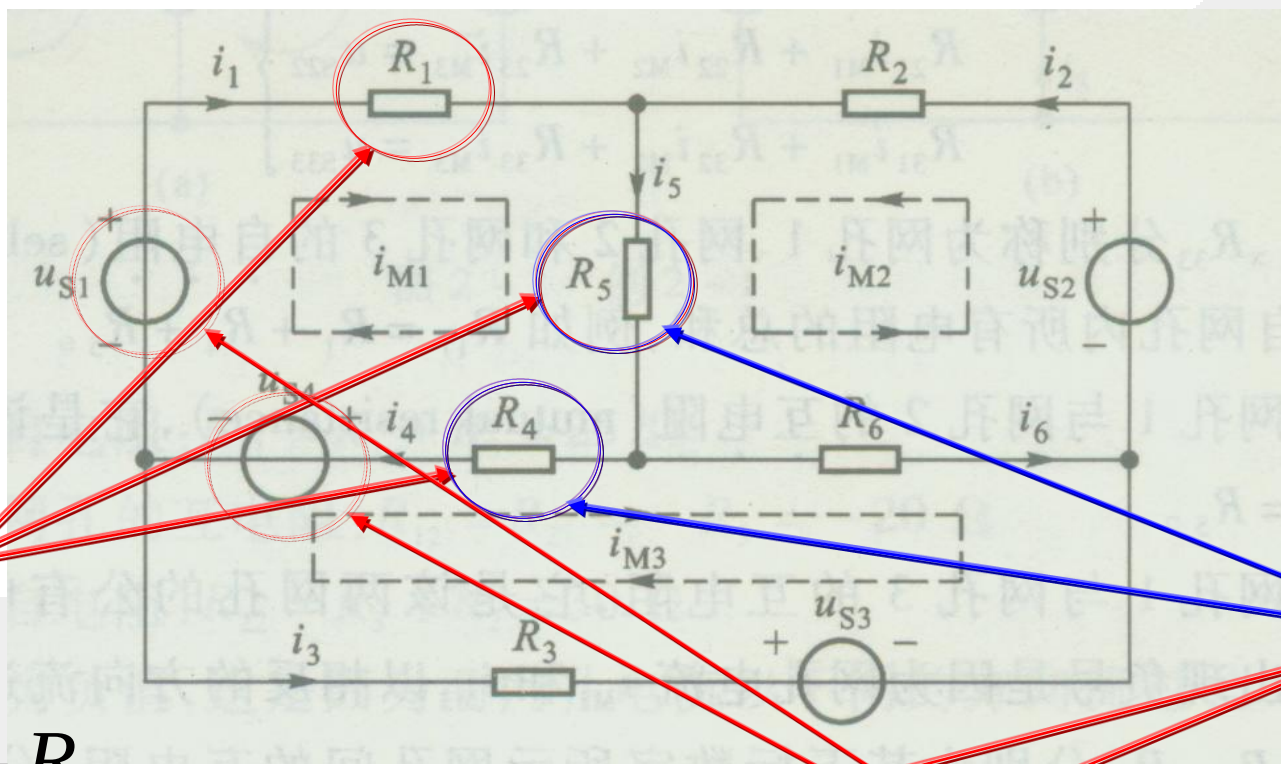
$$\left. \begin{aligned} R_{11}i_{M1} + R_{12}i_{M2} + R_{13}i_{M3} &= u_{S11} \\ R_{21}i_{M1} + R_{22}i_{M2} + R_{23}i_{M3} &= u_{S22} \\ R_{31}i_{M1} + R_{32}i_{M2} + R_{33}i_{M3} &= u_{S33} \end{aligned} \right\}$$

自电阻、互电阻

网孔电压升的代数和

注意：适用于仅含独立电压源和电阻的电路

网孔分析法



自电阻

$$R_1 + R_4 + R_5$$

互电阻

$$-R_4$$

$$R_5$$

$$R_{11}i_{M1} + R_{12}i_{M2} + R_{13}i_{M3} = u_{S11}$$

$$u_{S1} - u_{S4}$$

网孔电压升的代数和

网孔分析法

一般情况，对于具有 $m=b-(n-1)$ 个网孔的电路，有

$$\begin{cases} R_{11}i_{M1} + R_{12}i_{M2} + \dots + R_{1m}i_{Mm} = u_{S11} \\ R_{21}i_{M1} + R_{22}i_{M2} + \dots + R_{2m}i_{Mm} = u_{S22} \\ \dots \\ R_{m1}i_{M1} + R_{m2}i_{M2} + \dots + R_{mm}i_{Mm} = u_{Smm} \end{cases}$$

其中

R_{kk} : 自电阻(为正), $k=1,2,\dots,m$ (∴ 绕行方向取参考方向)。

R_{jk} : 互电阻 $\begin{cases} + : \text{流过互阻两个网孔电流方向相同} \\ - : \text{流过互阻两个网孔电流方向相反} \end{cases}$

特例：不含受控源的线性网络 $R_{jk}=R_{kj}$ ，系数矩阵为对称阵。
(平面电路， R_{jk} 均为负(当网孔电流均取顺(或逆)时针方向))

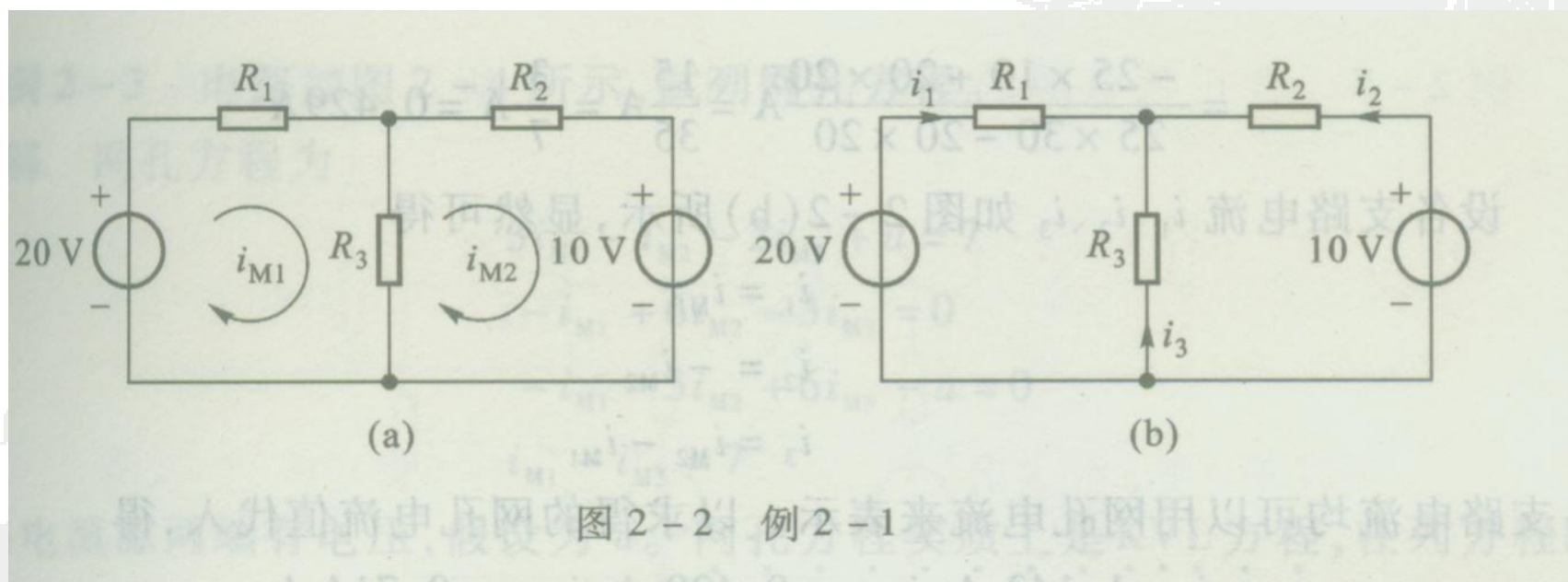
网孔分析法

网孔电流法的一般步骤:

- (1) 选定 $m=b-(n-1)$ 个网孔, 确定其绕行方向;
- (2) 对 m 个网孔, 以网孔电流为变量, 列写其KVL方程;
- (3) 求解上述方程, 得到 m 个网孔电流;
- (4) 求各支路电流(用网孔电流表示);
- (5) 求解其它参数。

网孔分析法

仅含有电压源、电阻的电路



网孔分析法

含有电流源、电阻的电路

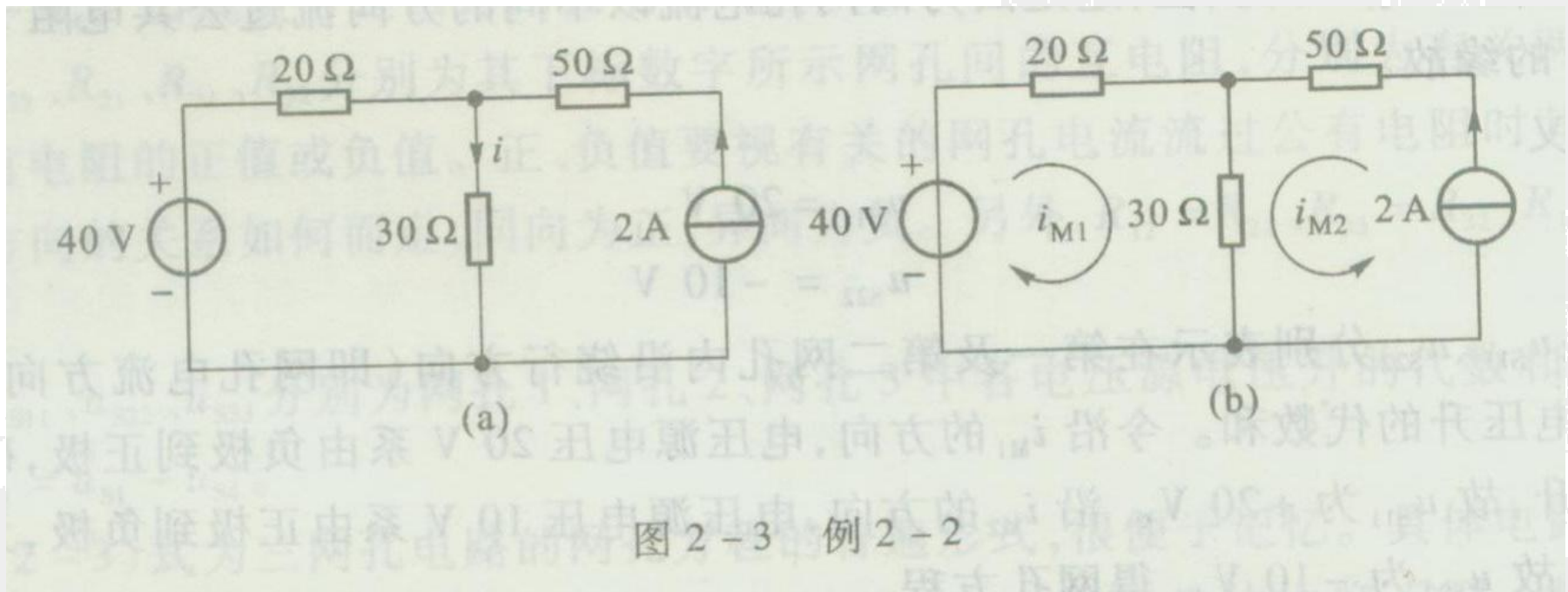


图 2-3 例 2-2

网孔分析法

含有受控源、电阻的电路

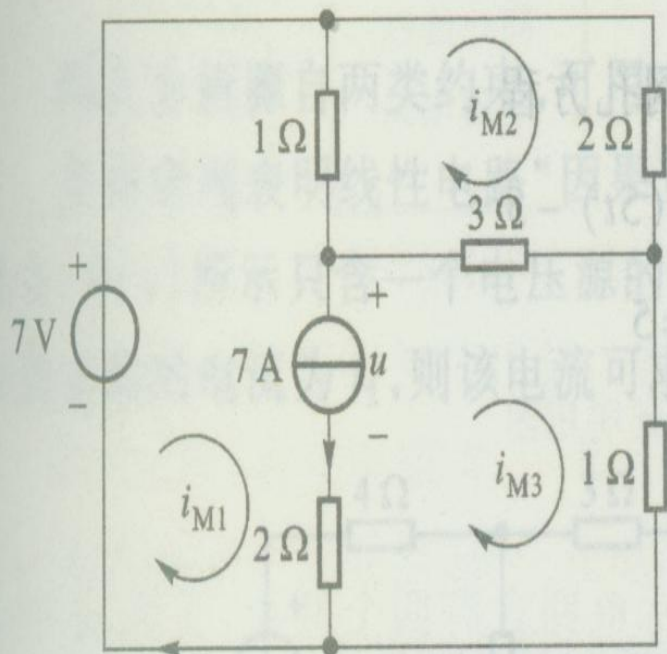


图 2-4 例 2-3

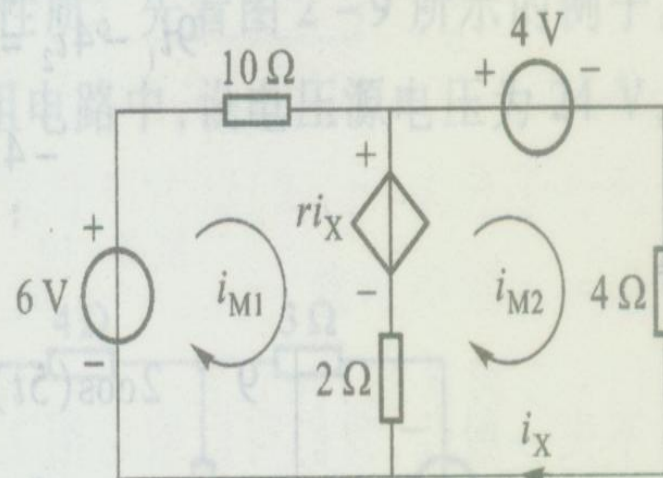


图 2-5 例 2-4

网孔分析法

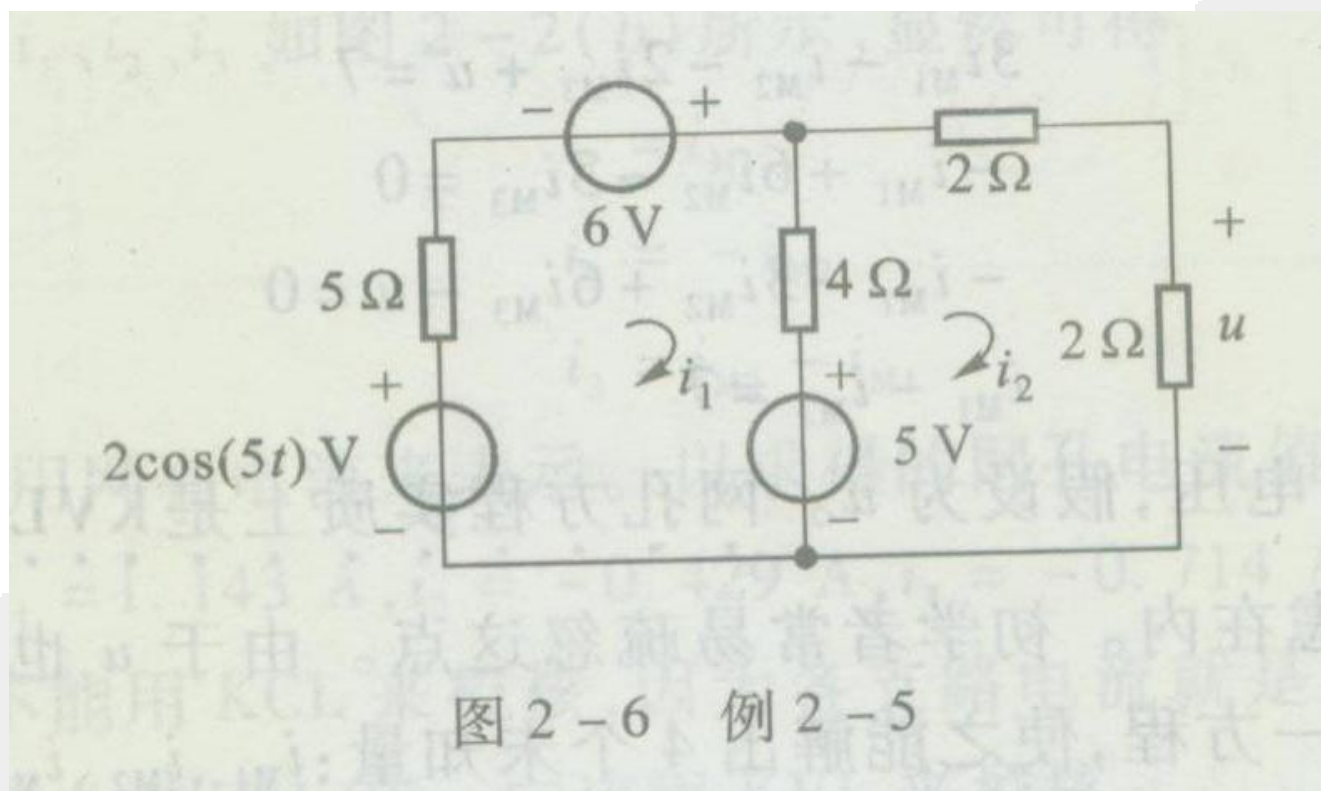
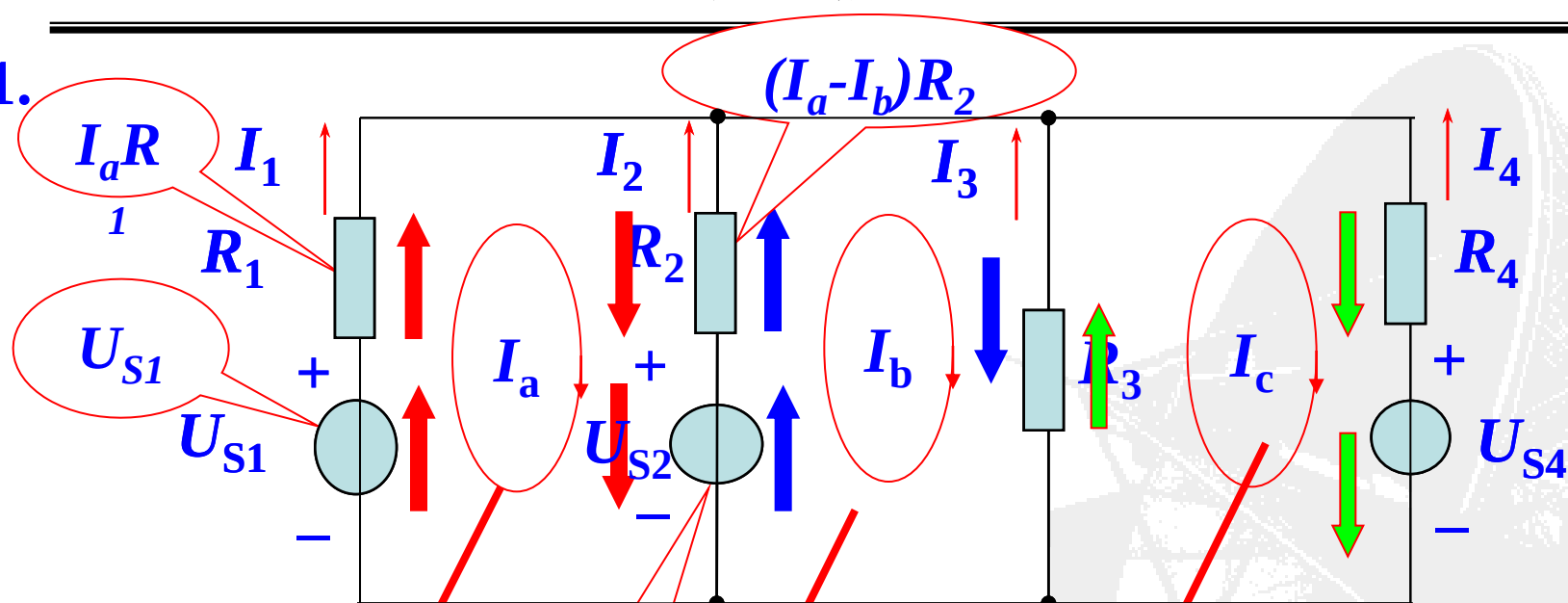


图 2-6 例 2-5

网孔分析法

例1.



$$(R_1 + R_2)I_a$$

$$-R_2I_b$$

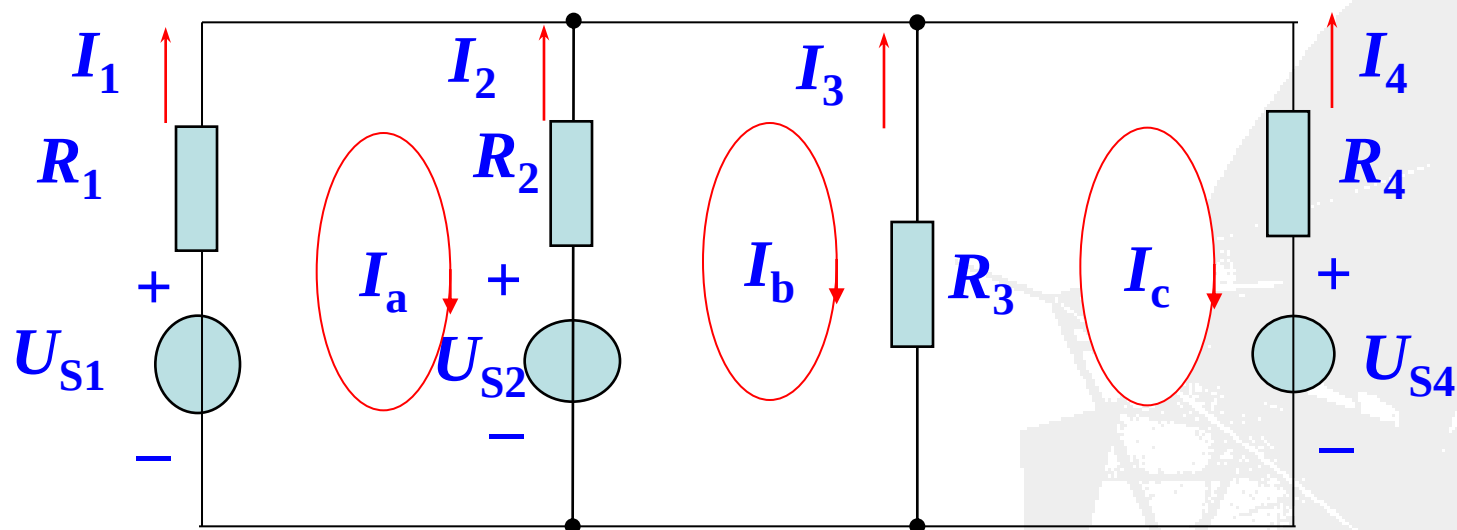
$$= U_{S1} - U_{S2}$$

$$-R_2I_a + (R_2 + R_3)I_b$$

$$-R_3I_c = U_{S2}$$

$$-R_3I_b + (R_3 + R_4)I_c = -U_{S4}$$

网孔分析法

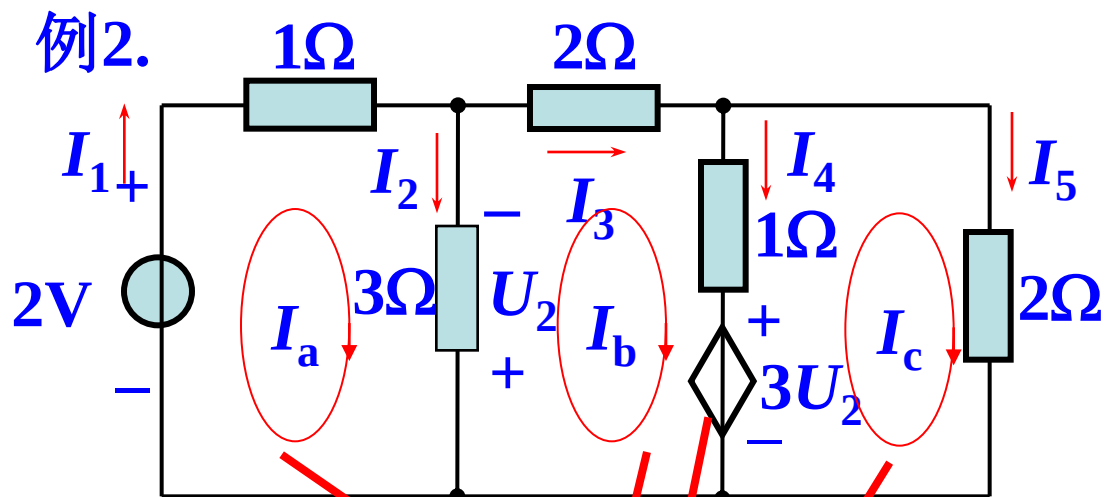


求解网孔电流方程，得 I_a, I_b, I_c

求各支路电流： $I_1 = I_a$ ， $I_2 = I_b - I_a$ ， $I_3 = I_c - I_b$ ， $I_4 = -I_c$

校核： 选一新回路。

网孔分析法



解:

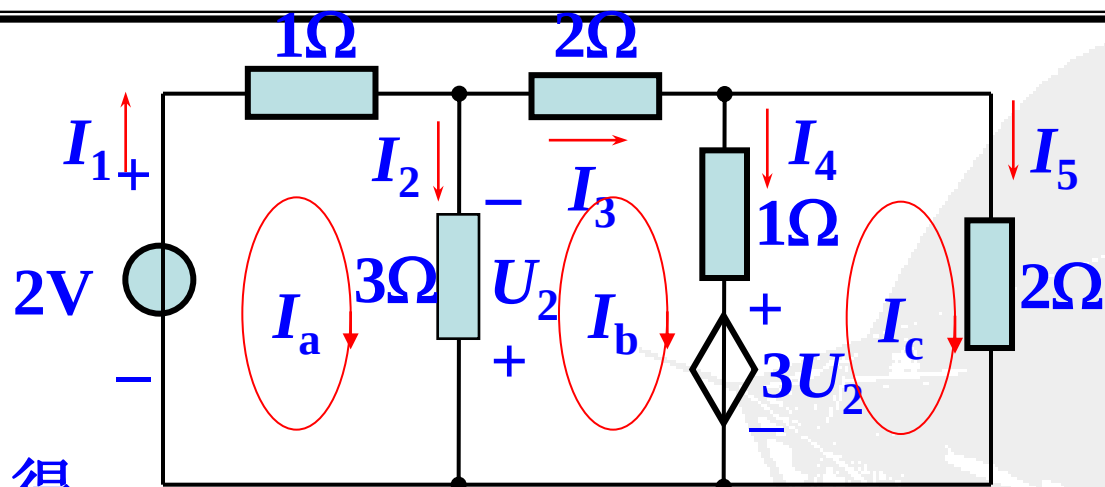
$$\textcircled{1} \begin{cases} 4I_a - 3I_b = 2 \\ -3I_a + 6I_b - I_c = -3U_2 \\ -I_b + 3I_c = 3U_2 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} U_2 = 3(I_b - I_a)$$

将看VCVS作独立源建立方程;

找出控制量和网孔电流关系。

网孔分析法



将②代入①，得

$$\textcircled{3} \begin{cases} 4I_a - 3I_b = 2 \\ -12I_a + 15I_b - I_c = 0 \\ 9I_a - 10I_b + 3I_c = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{解得}} \begin{cases} I_a = 1.19\text{A} \\ I_b = 0.92\text{A} \\ I_c = -0.51\text{A} \end{cases}$$

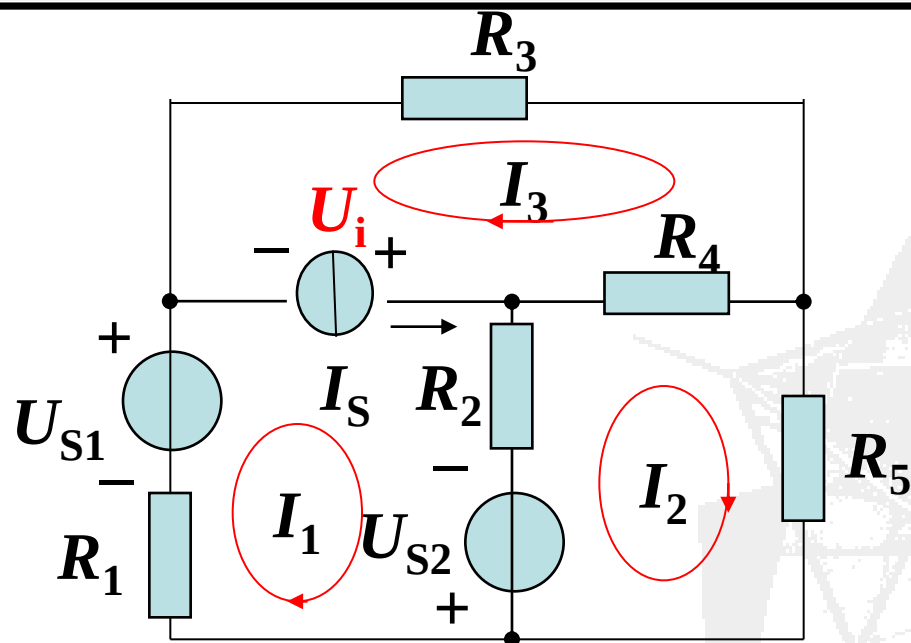
各支路电流为：

$$I_1 = I_a = 1.19\text{A}, I_2 = I_a - I_b = 0.27\text{A}, I_3 = I_b = 0.92\text{A}, \\ I_4 = I_b - I_c = 1.43\text{A}, I_5 = I_c = -0.52\text{A}.$$

校核： $1 \times I_1 + 2I_3 + 2I_5 = 2\text{V} \quad (\sum U_{R\text{降}} = \sum E_{\text{升}})$

网孔分析法

例3.



引入电流源电压为变量，增加网孔电流和电流源电流的关系方程。

$$(R_1 + R_2)I_1 - R_2I_2 = U_{S1} + U_{S2} + U_i$$

$$-R_2I_1 + (R_2 + R_4 + R_5)I_2 - R_4I_3 = -U_{S2}$$

$$-R_4I_2 + (R_3 + R_4)I_3 = -U_i$$

$$I_S = I_1 - I_3$$

互易定理

互易定理表明线性电路“因果互易”的性质。

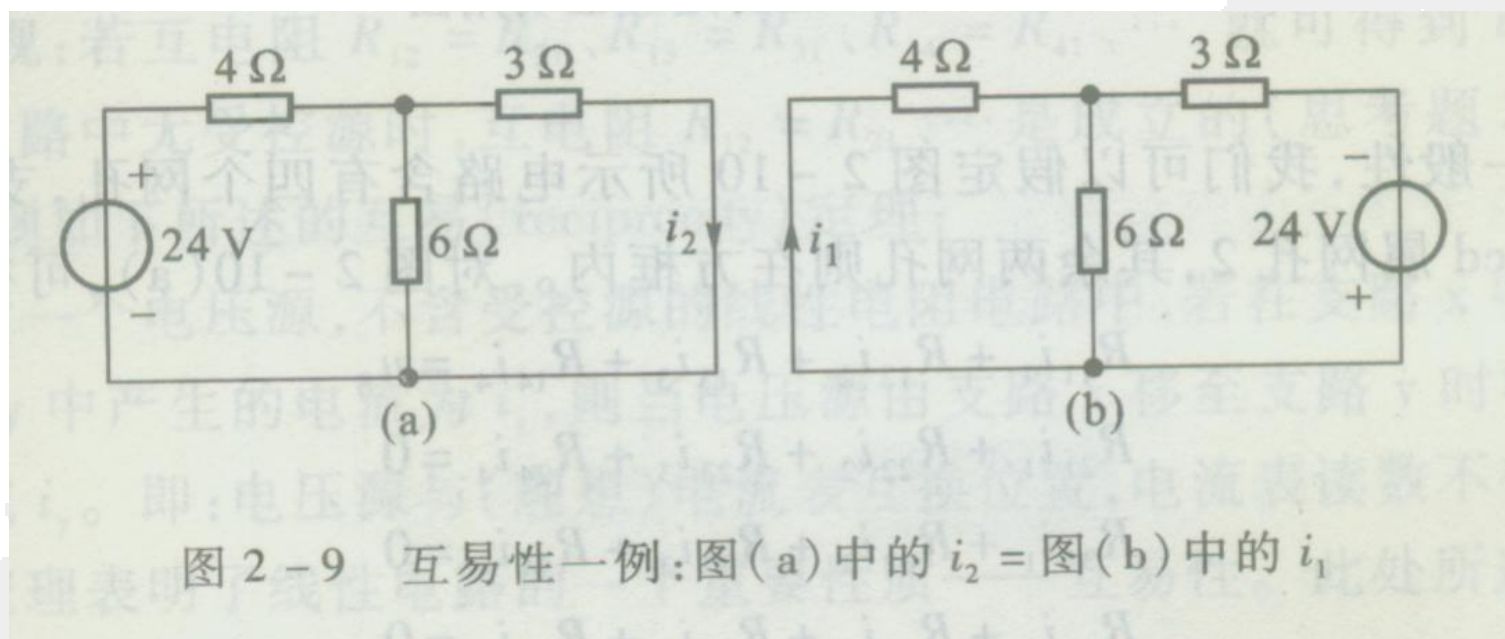
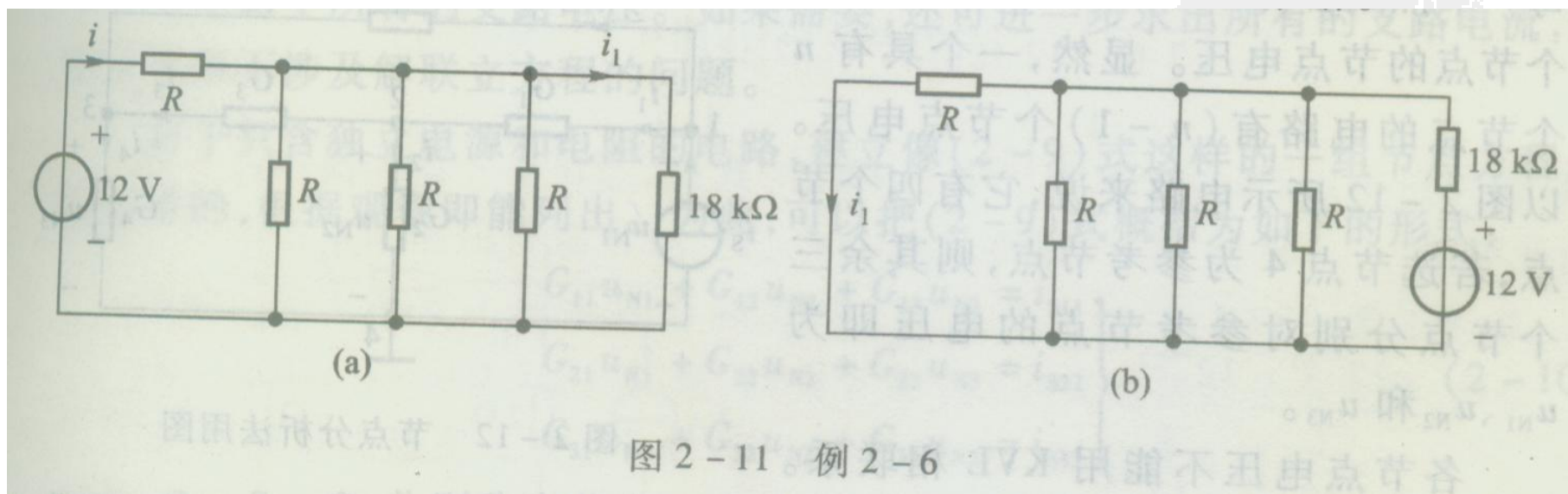


图 2-10 互易定理证明用图

互易定理

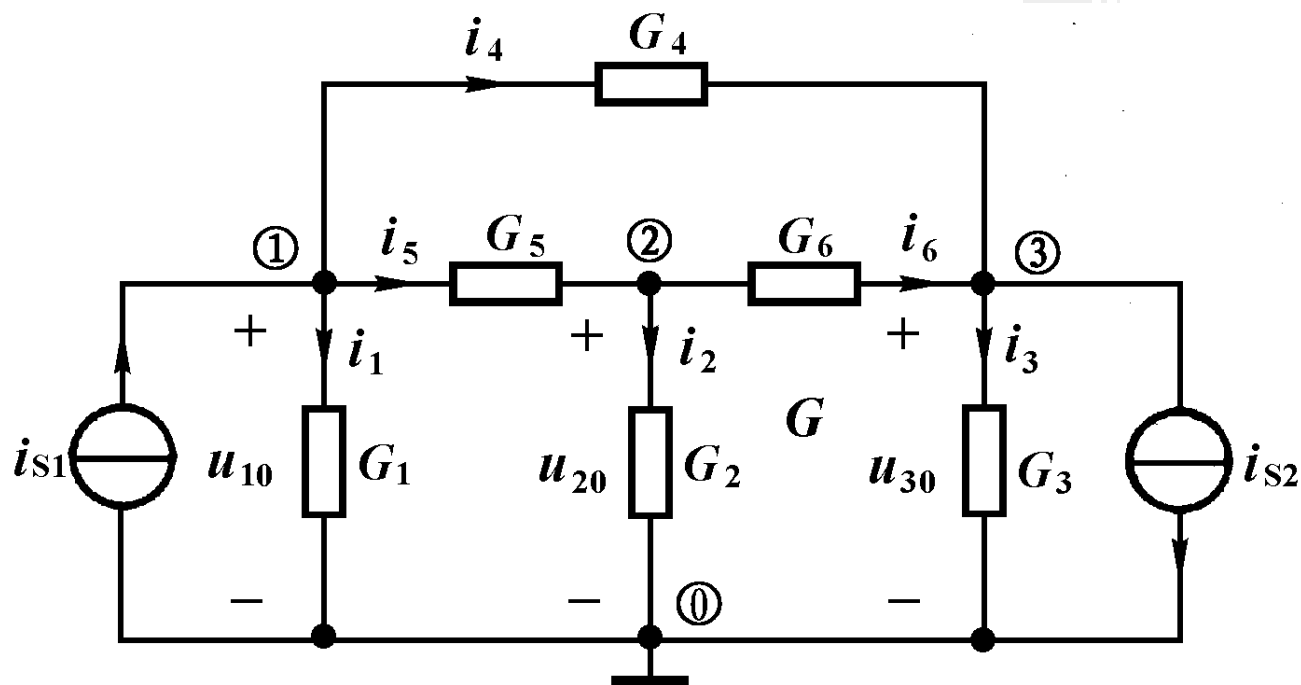
互易定理的应用



由例题可以得到：互易定理可用于简化电路分析过程。

节点分析法

例如图示电路各支路电压可表示为：



$$u_1 = u_{10} = v_1$$

$$u_2 = u_{20} = v_2$$

$$u_3 = u_{30} = v_3$$

$$u_4 = u_{10} - u_{30} = v_1 - v_3$$

$$u_5 = u_{10} - u_{20} = v_1 - v_2$$

$$u_6 = u_{20} - u_{30} = v_2 - v_3$$

节点分析法

基本思想（思考）：

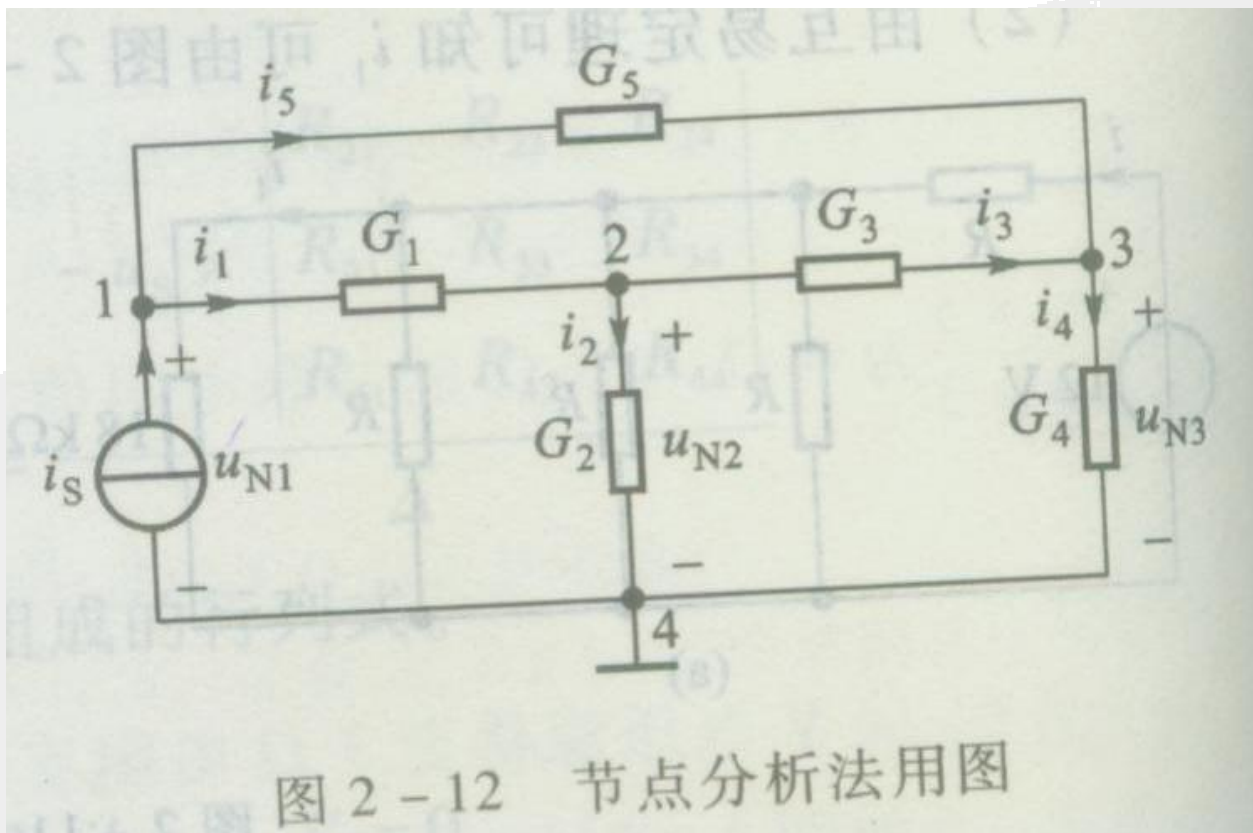
能否假定一组变量，使之自动满足 KVL，从而就不必列写KVL方程，减少联立方程的个数？

KVL恰说明了电位的单值性。如果选节点电压为未知量，则KVL自动满足，就无需列写KVL方程。当以节点电压为未知量列电路方程、求出节点电压后，便可方便地得到各支路电压、电流。

节点分析法

基本思想：

以节点电压为求解对象，列写KCL方程。

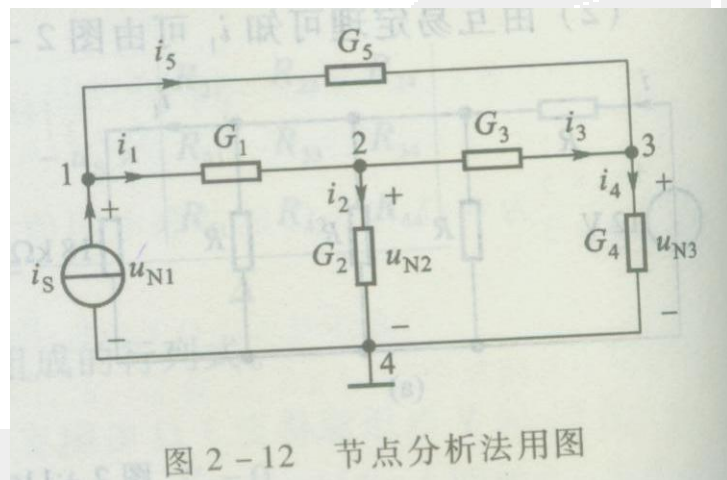


节点分析法

节点电压法的独立方程数为 $(n-1)$ 个。与支路电流法相比，方程数可减少 $b-(n-1)$ 个。

$$\left. \begin{aligned} i_1 + i_5 - i_s &= 0 \\ -i_1 + i_2 + i_3 &= 0 \\ -i_3 + i_4 - i_5 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= G_1(u_{N1} - u_{N2}) \\ i_2 &= G_2 u_{N2} \\ i_3 &= G_3(u_{N2} - u_{N3}) \\ i_4 &= G_4 u_{N3} \\ i_5 &= G_5(u_{N1} - u_{N3}) \end{aligned} \right\}$$



$$\left. \begin{aligned} (G_1 + G_5)u_{N1} - G_1 u_{N2} - G_5 u_{N3} &= i_s \\ -G_1 u_{N1} + (G_1 + G_2 + G_3)u_{N2} - G_3 u_{N3} &= 0 \\ -G_5 u_{N1} - G_3 u_{N2} + (G_3 + G_4 + G_5)u_{N3} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

节点分析法

观察一下，可得到这样一个标准的方程

$$\left. \begin{aligned} G_{11}u_{N1} + G_{12}u_{N2} + G_{13}u_{N3} &= i_{S11} \\ G_{21}u_{N1} + G_{22}u_{N2} + G_{23}u_{N3} &= i_{S22} \\ G_{31}u_{N1} + G_{32}u_{N2} + G_{33}u_{N3} &= i_{S33} \end{aligned} \right\}$$

自电导、互电导

电流源输送电流的代数和

注意：适用于仅含独立电流源和电阻的电路

节点分析法

一般情况:

$$\begin{cases} G_{11}u_{N1} + G_{12}u_{N2} + \dots + G_{1,n-1}u_{N,n-1} = i_{S11} \\ G_{21}u_{N1} + G_{22}u_{N2} + \dots + G_{2,n-1}u_{N,n-1} = i_{S22} \\ \dots \dots \dots \dots \\ G_{n-1,1}u_{N1} + G_{n-1,2}u_{N2} + \dots + G_{n-1,n}u_{N,n-1} = i_{S(n-1,n-1)} \end{cases}$$

其中 G_{ii} —自电导，等于接在节点*i*上所有支路的电导之和(包括电压源与电阻串联支路)。总为正。

$G_{ij} = G_{ji}$ —互电导，等于接在节点*i*与节点*j*之间的所支路的电导之和，并冠以负号。

i_{Sii} — 流入节点*i*的所有电流源电流的代数和。

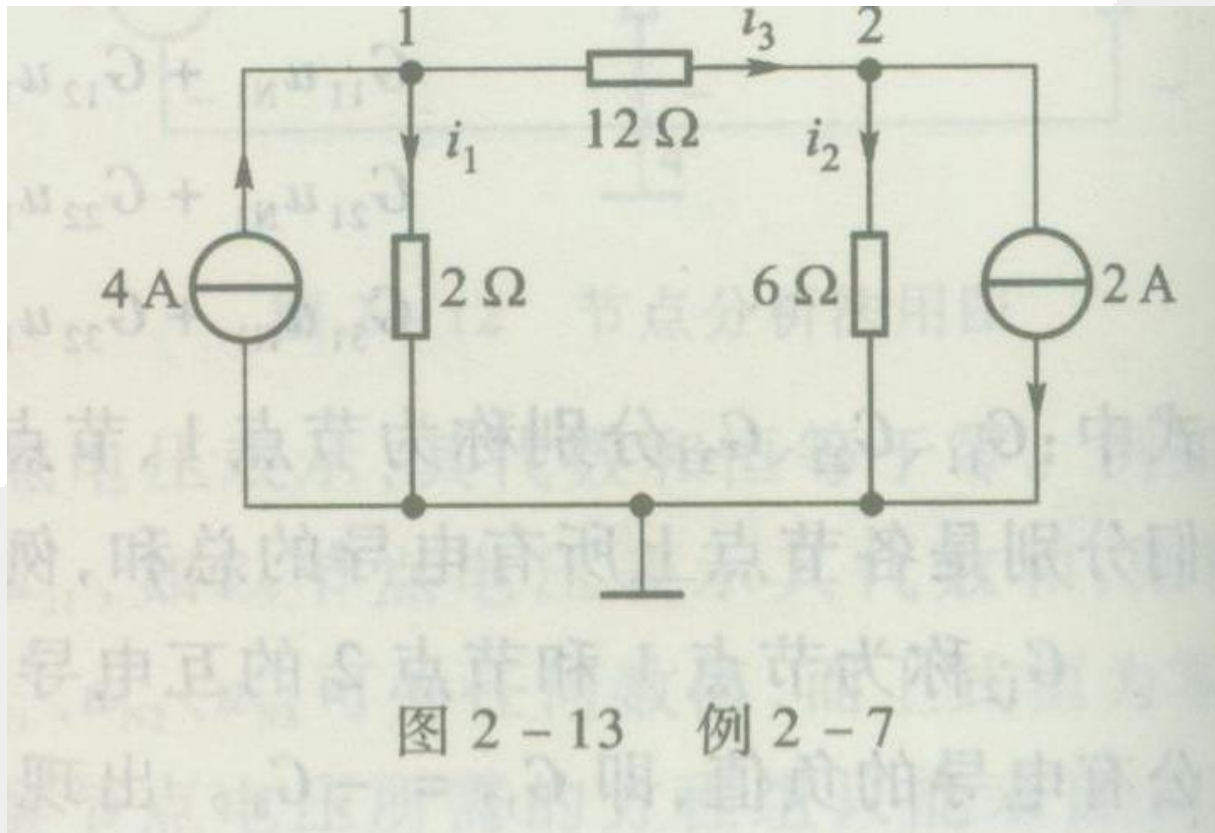
节点分析法

节点法的一般步骤:

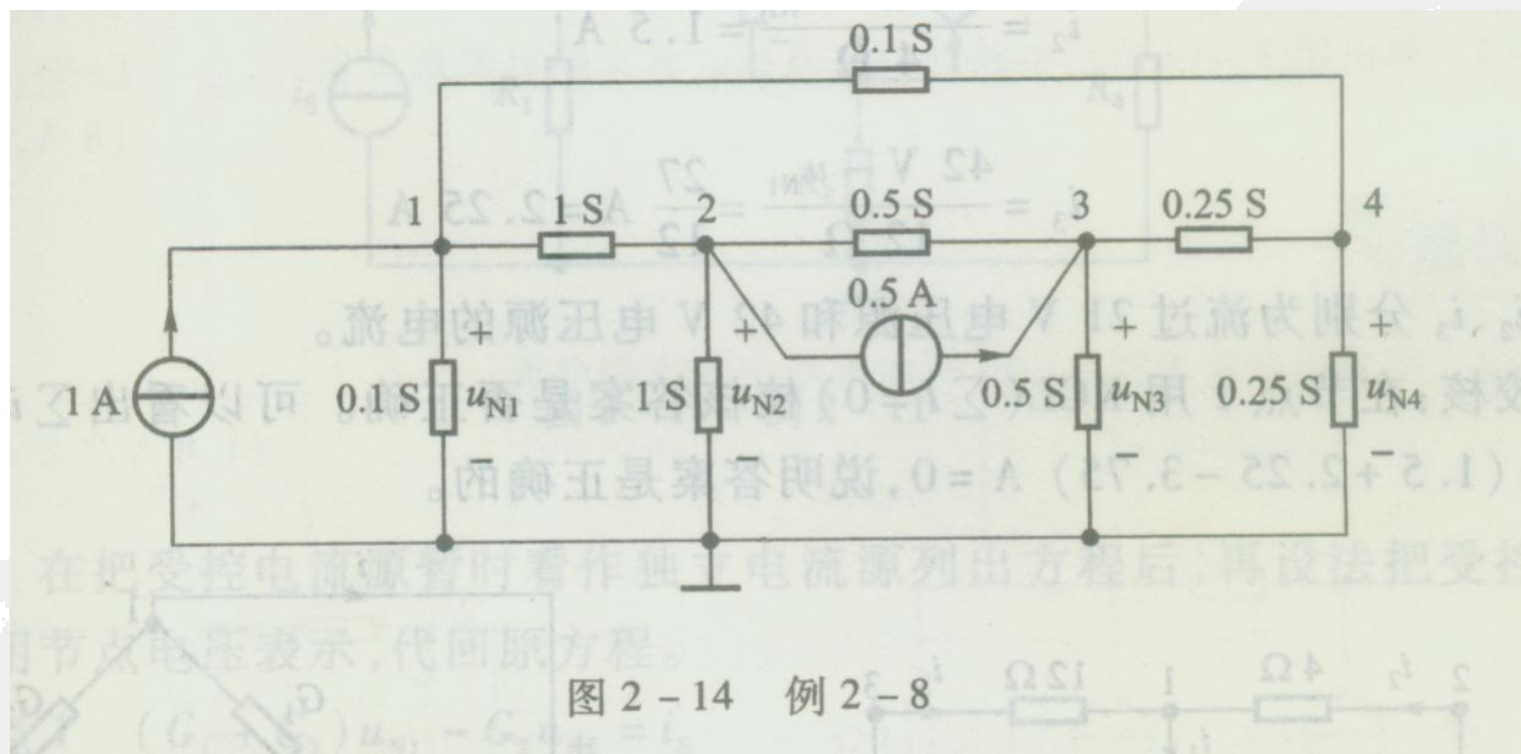
- (1) 选定参考节点，标定 $n-1$ 个独立节点；
- (2) 对 $n-1$ 个独立节点，以节点电压为未知量，列写其KCL方程；
- (3) 求解上述方程，得到 $n-1$ 个节点电压；
- (4) 求各支路电流(用节点电压表示)；
- (5) 其它分析。

节点分析法

仅含有电流源、电阻的电路

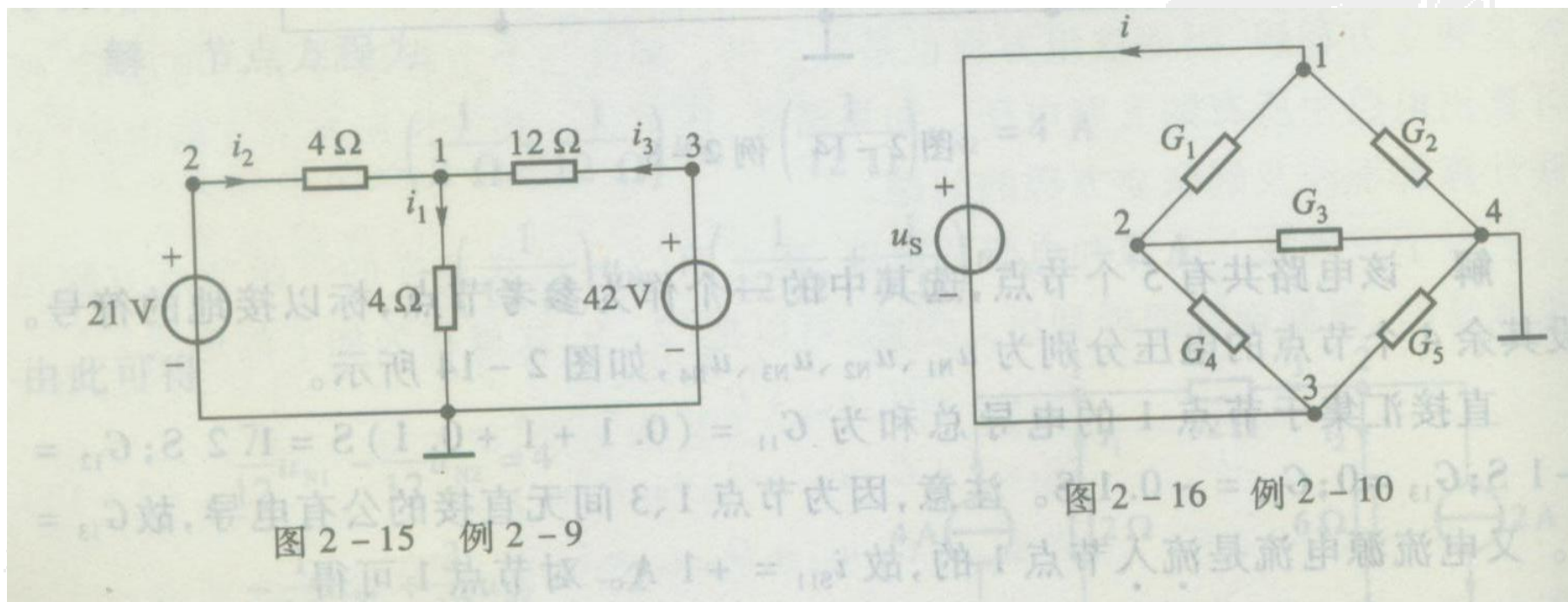


节点分析法



节点分析法

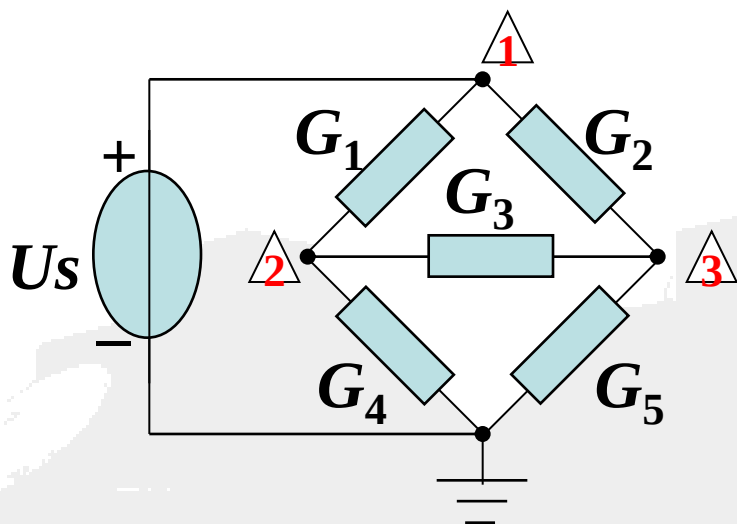
含有电压源、电阻的电路



节点分析法

例 试列写下图含理想电压源电路的节点电压方程。

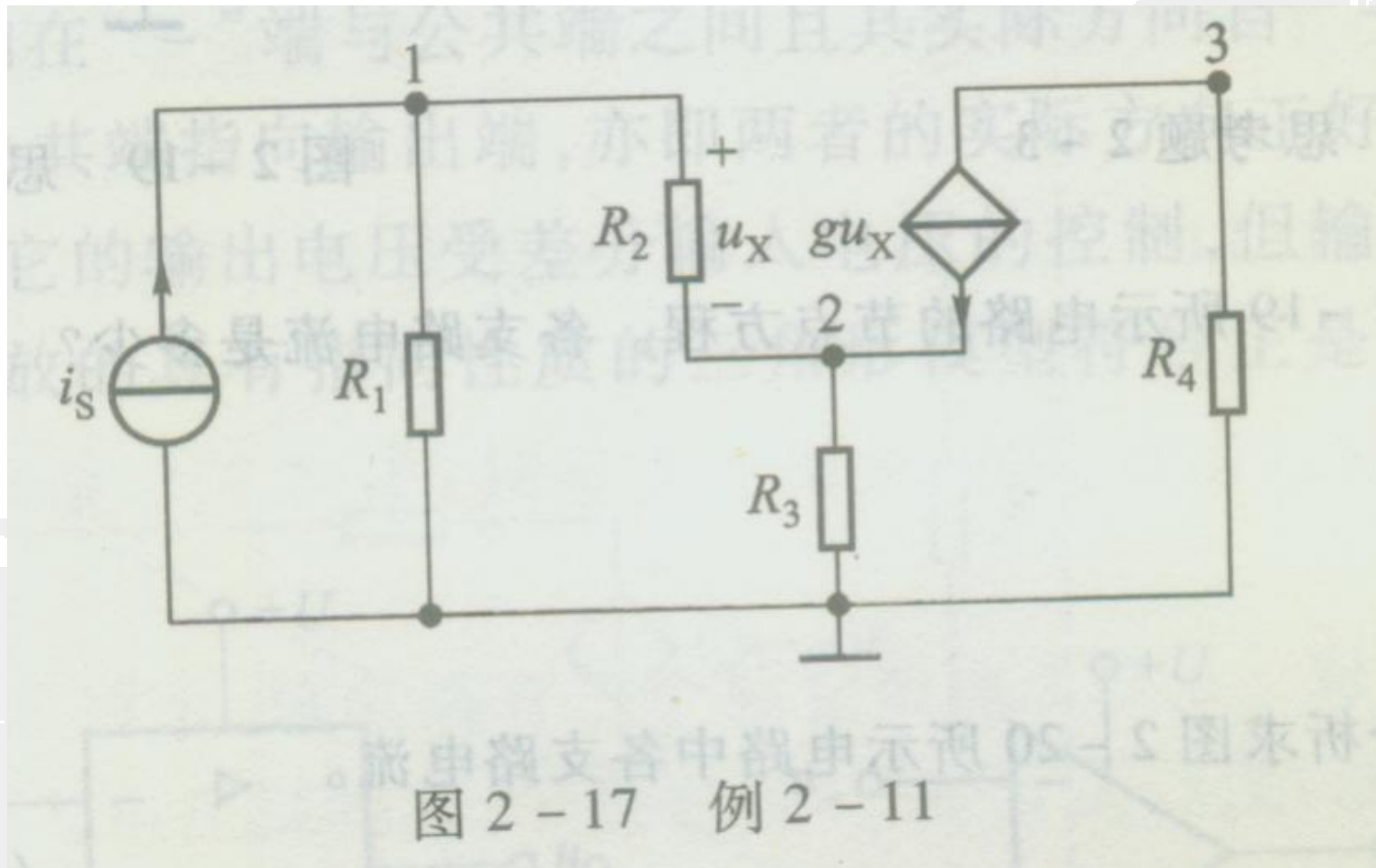
选择合适的参考点（方程简洁）



$$\begin{cases} U_1 = U_s \\ -G_1 U_1 + (G_1 + G_3 + G_4) U_2 - G_3 U_3 = 0 \\ -G_2 U_1 - G_3 U_2 + (G_2 + G_3 + G_5) U_3 = 0 \end{cases}$$

节点分析法

含有受控源、电阻的电路



小结

支路法、网孔法和节点法的比较：

(1) 方程数的比较

	KCL方程	KVL方程	方程总数
支路法	$n-1$	$b-(n-1)$	b
网孔法	0	$b-(n-1)$	$b-(n-1)$
节点法	$n-1$	0	$n-1$

(2) 根据电路含有电流源或电压源选择分析方法。

(3) 网孔法、节点法易于编程。目前用计算机分析网络(电网，集成电路设计等)采用节点法较多。

运算放大器

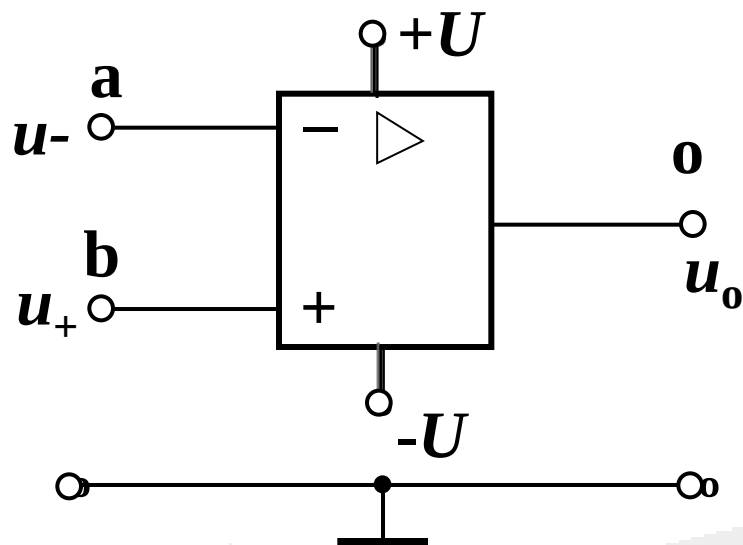
运算放大器(*operational amplifier*):

一种有着十分广泛用途的电子器件。最早开始应用于1940年，主要用于模拟计算机，可模拟加、减、积分等运算，对电路进行模拟分析。1960年后，随着集成电路技术的发展，运算放大器逐步集成化，大大降低了成本，获得了越来越广泛的应用。

运算放大器基本上是高放大倍数的直接耦合的放大器(一般内部由20个左右的晶体管组成)，可用来放大直流和频率不太高的交流信号。

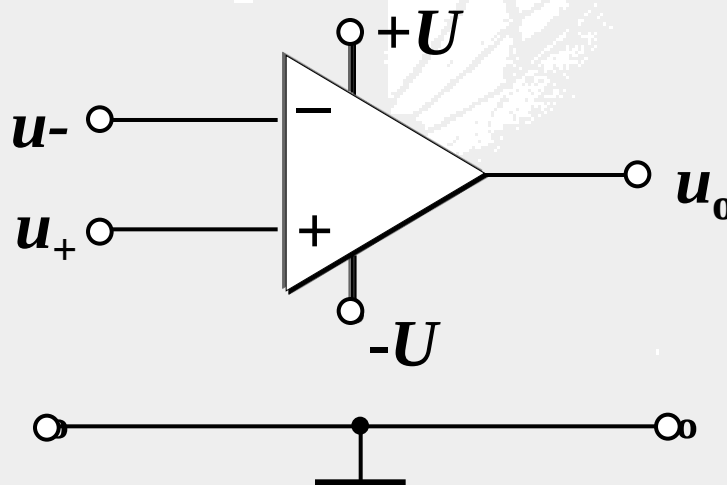
运算放大器

电路符号



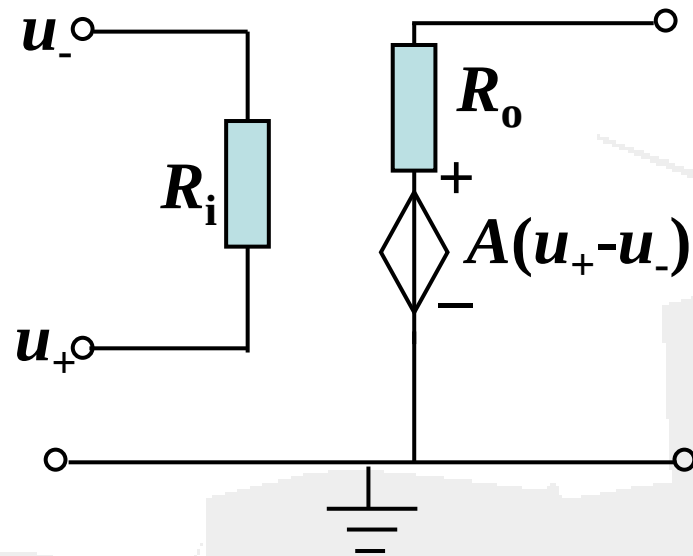
a: 反相输入端, 输入电压 u_-
b: 同相输入端, 输入电压 u_+
o: 输出端, 输出电压 u_o
⊥ : 公共端(接地端)

运放具有“单方向”性质。



运算放大器

电路模型



R_i : 运算放大器两输入端间的输入电阻

R_o : 运算放大器的输出电阻

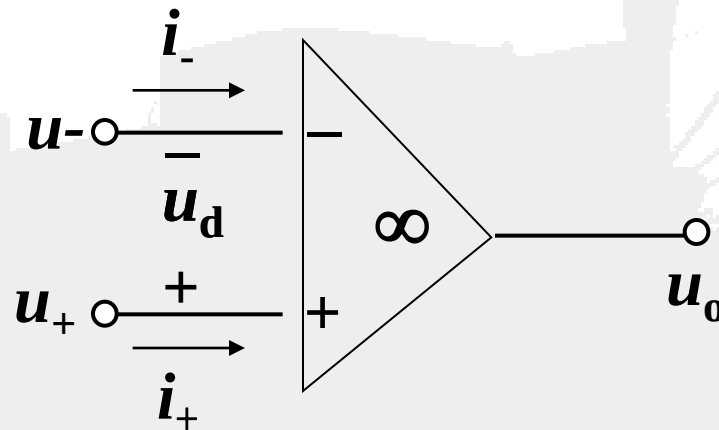
运算放大器

理想运算放大器

满足如下条件：

① $A \rightarrow \infty$ $u_+ = u_-$

② $R_i \rightarrow \infty$, $i_+ = i_- = 0$



理想运放的电路符号

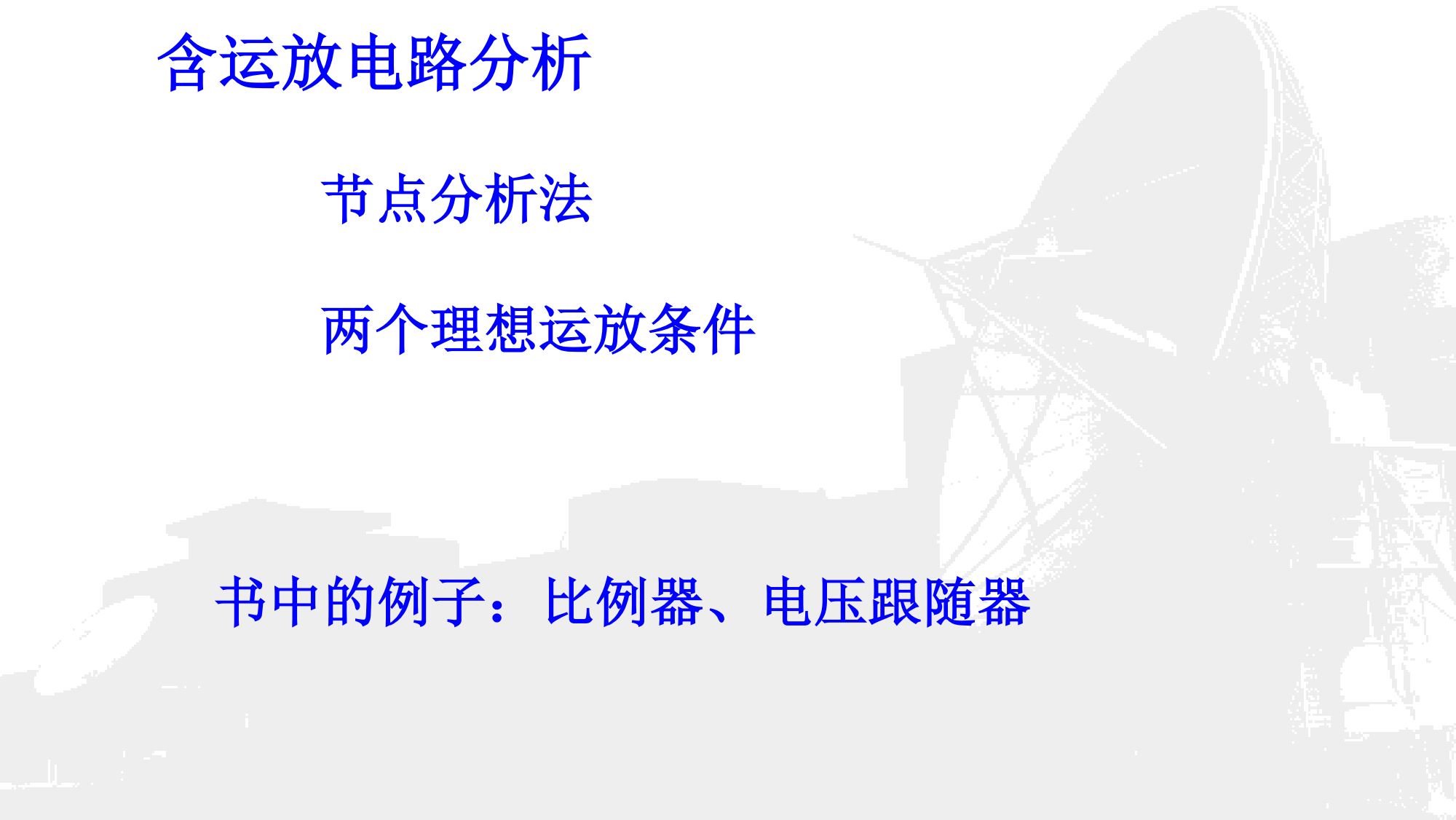
运算放大器

含运放电路分析

节点分析法

两个理想运放条件

书中的例子：比例器、电压跟随器



电路对偶性

电路的对偶量

电压	电流	网孔电流	节点电压
电阻	电导	电压源	电流源
短路	开路	电荷	磁链
KCL	KVL	电感	电容
串联	并联		

总结

- 网孔分析法，网孔电流
- 节点分析法，节点电压
- 互易定理
- 对偶性
- 含运放的电路分析

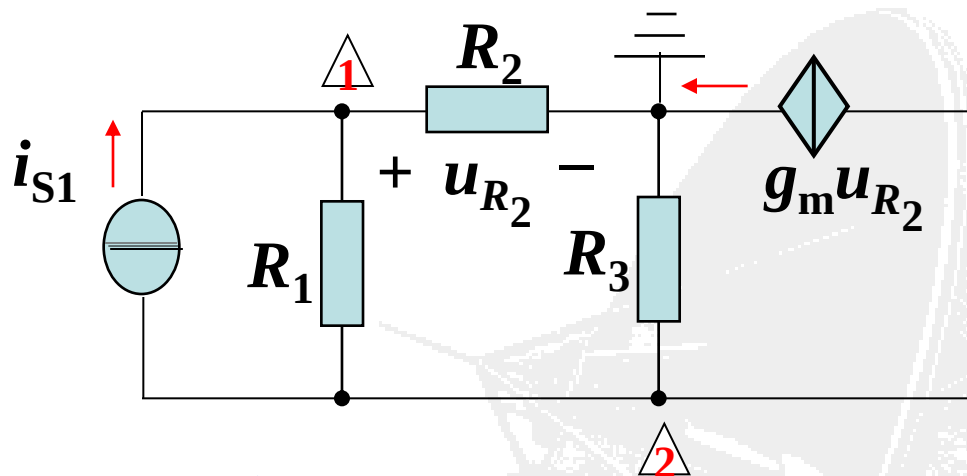
理想运放的条件

了解运放电路的分析方法



节点分析法

列写图中含VCCS电路的节点电压方程。

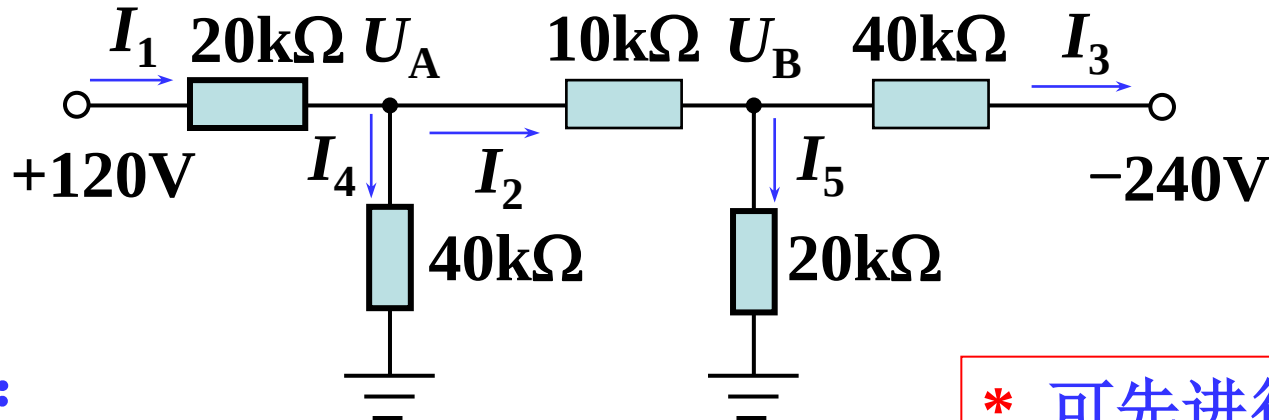


- (1) 先把受控源当作独立源看列方程;
- (2) 用节点电压表示控制量。

解:

$$\begin{cases} \frac{u_{n1} - u_{n2}}{R_1} + \frac{u_{n1}}{R_2} = i_{s1} \\ \frac{u_{n2} - u_{n1}}{R_1} + \frac{u_{n2}}{R_3} = -i_{s1} - g_m u_{R_2} \\ u_{R_2} = u_{n1} \end{cases}$$

例2 用节点法求各支路电流。



解:

* 可先进行电源变换。

(1) 列节点电压方程:

$$\begin{cases} (0.05+0.025+0.1)U_A-0.1U_B=0.006 \\ -0.1U_A+(0.1+0.05+0.025)U_B=-0.006 \end{cases}$$

(2) 解方程, 得: $U_A=21.8\text{V}$, $U_B=-21.82\text{V}$

(3) 各支路电流:

$$I_1=(120-U_A)/20\text{k}=4.91\text{mA}$$

$$I_2=(U_A-U_B)/10\text{k}=4.36\text{mA}$$

$$I_3=(U_B+240)/40\text{k}=5.45\text{mA}$$

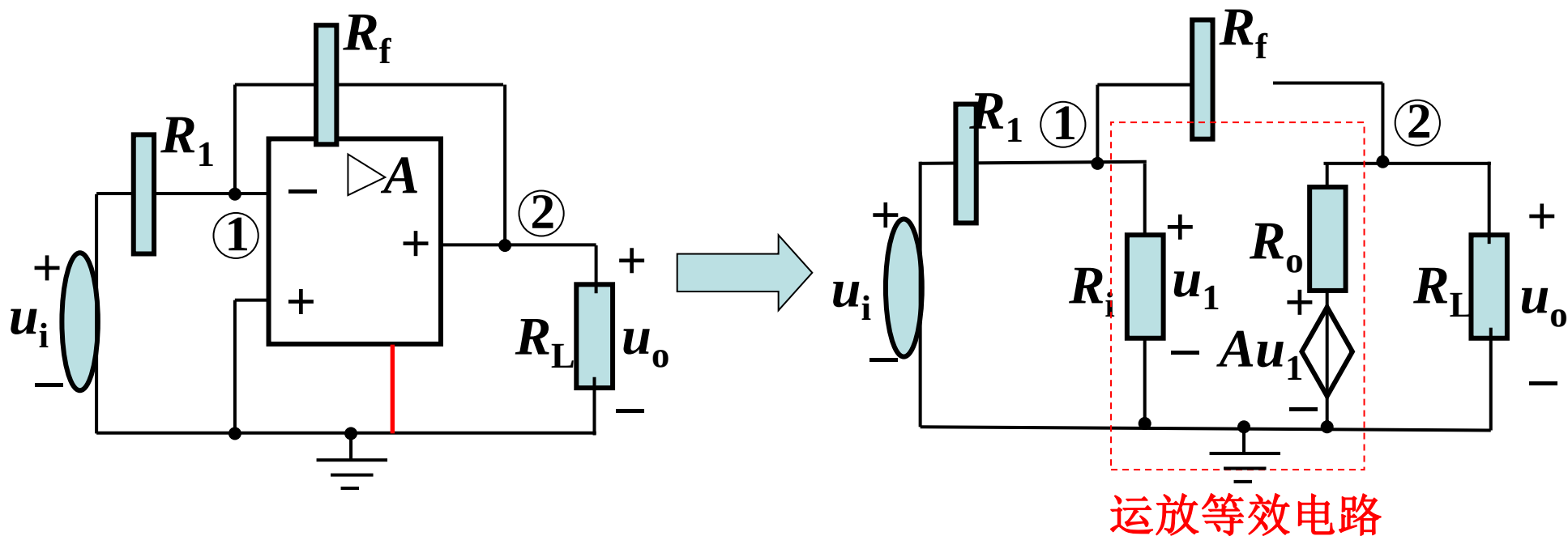
$$I_4=U_B/40=0.546\text{mA}$$

$$I_5=U_B/20=-1.09\text{mA}$$

2.3.2 含运算放大器的电路的分析

运放开环工作极不稳定，一般外部接若干元件(R 、 C 等)，使其工作在闭环状态。

1. 反相比例器



用节点电压法分析：(电阻用电导表示)

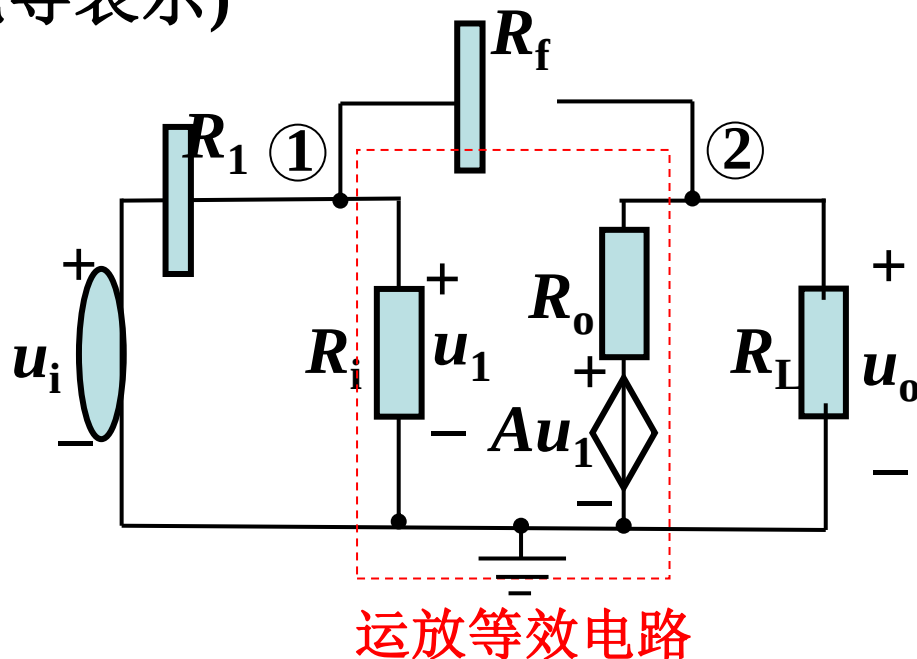
$$\begin{cases} (G_1 + G_i + G_f)u_{n1} - G_f u_{n2} = G_1 u_i \\ -G_f u_{n1} - (G_f + G_o + G_L)u_{n2} = G_o A u_1 \\ u_1 = u_{n1} \end{cases}$$

整理，得

$$\begin{cases} (G_1 + G_i + G_f)u_{n1} - G_f u_{n2} = G_1 u_i \\ (-G_f + G_o A)u_{n1} - (G_f + G_o + G_L)u_{n2} = 0 \end{cases}$$

解得

$$u_o = u_{n2} = -\frac{G_1}{G_f} \frac{G_f (AG_o - G_f)}{G_f (AG_o - G_f) + (G_1 + G_i + G_f)(G_f + G_o + G_L)} u_i$$



$$u_o = u_{n2} = -\frac{G_1}{G_f} \frac{G_f (AG_o - G_f)}{G_f (AG_o - G_f) + \cancel{(G_1 + G_i + G_f)(G_f + G_o + G_L)}} u_i$$

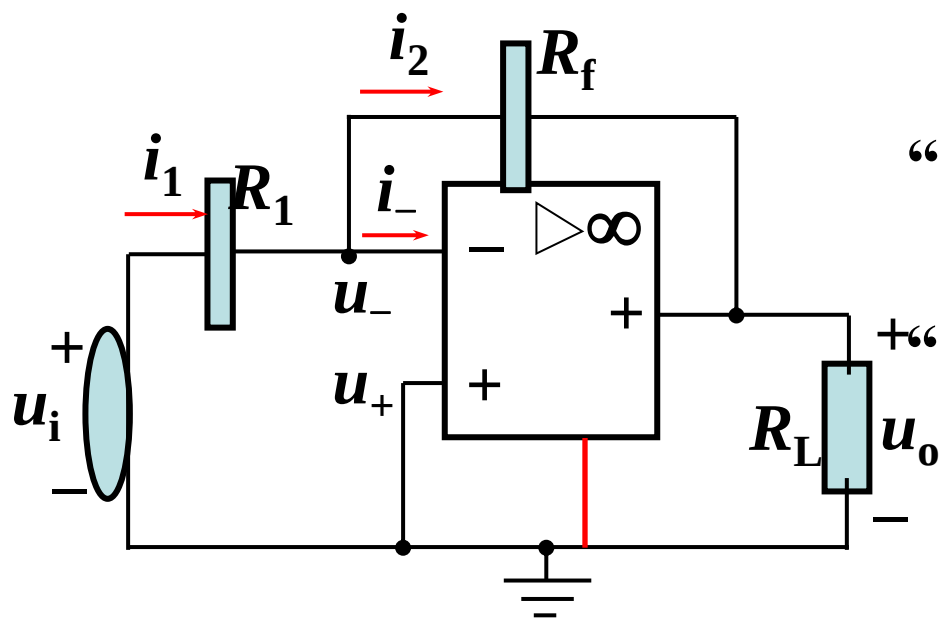
因A一般很大，上式中分母中 $G_f(AG_o - G_f)$ 一项的值比 $(G_1 + G_i + G_f)(G_f + G_o + G_L)$ 要大得多。所以，后一项可忽略，得

$$u_o \approx -\frac{G_1}{G_f} u_i = -\frac{R_f}{R_1} u_i$$

表明 u_o/u_i 只取决于反馈电阻 R_f 与 R_1 比值，负号表明 u_o 和 u_i 总是符号相反(反相比例器)。

此近似结果可将运放看作理想情况而得到。

由理想运放构成的反相比例器：



“虚短”： $u_+ = u_- = 0$, $i_1 = u_S/R_1$
 $i_2 = -u_o/R_f$

“虚断”： $i_- = 0$, $i_2 = i_1$

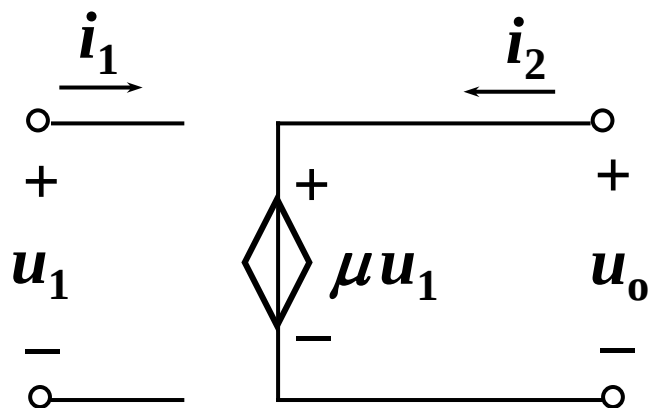
$$\therefore u_o = -\frac{R_f}{R_1} u_i$$

注意：(1) 当 R_1 和 R_f 确定后，为使 u_o 不超过饱和电压(即保证工作在线性区)，对 u_i 有一定限制。

(2) 运放不工作在开环状态(极不稳定，振荡在饱和区)，都工作在闭环状态，输出电压由外电路决定。

(R_f 接在输出端和反相输入端,称为负反馈。)

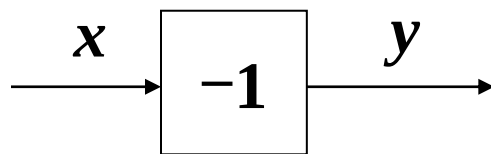
反相比例器的对外等效电路：



相当于一个压控电压源。

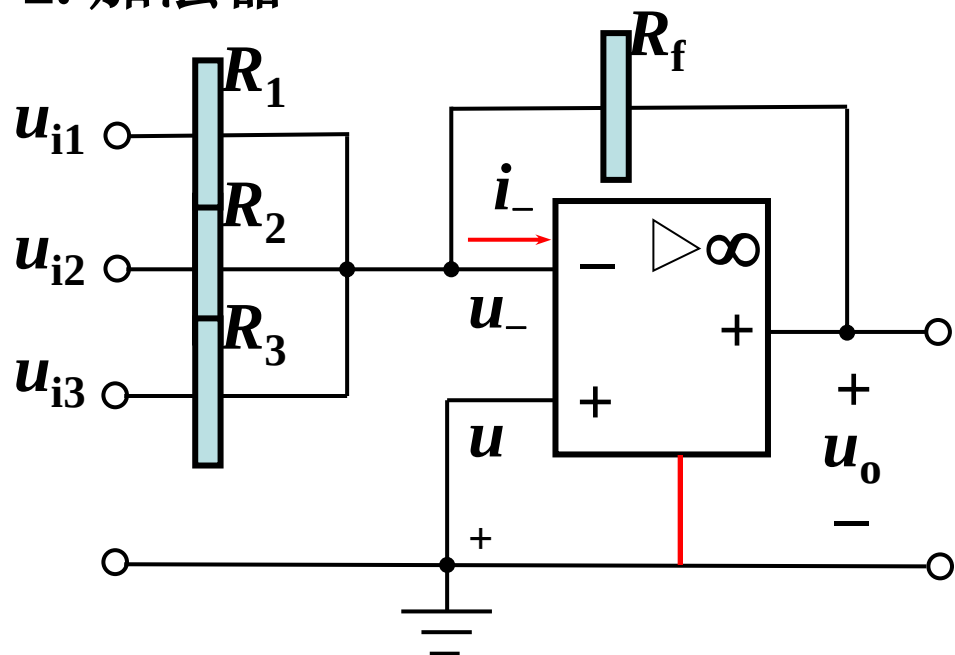
VCVS $\mu = -R_f/R_1$

当 $R_f = R_1$ 时，组成反相器，如下图：



$$y = -x$$

2. 加法器

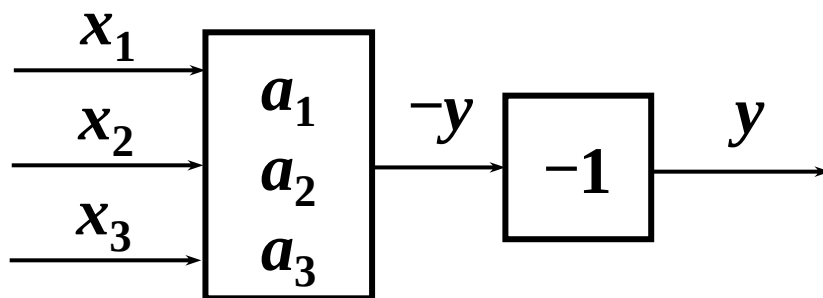


$$\begin{cases} u_- = u_+ = 0 \\ i_- = 0 \end{cases}$$

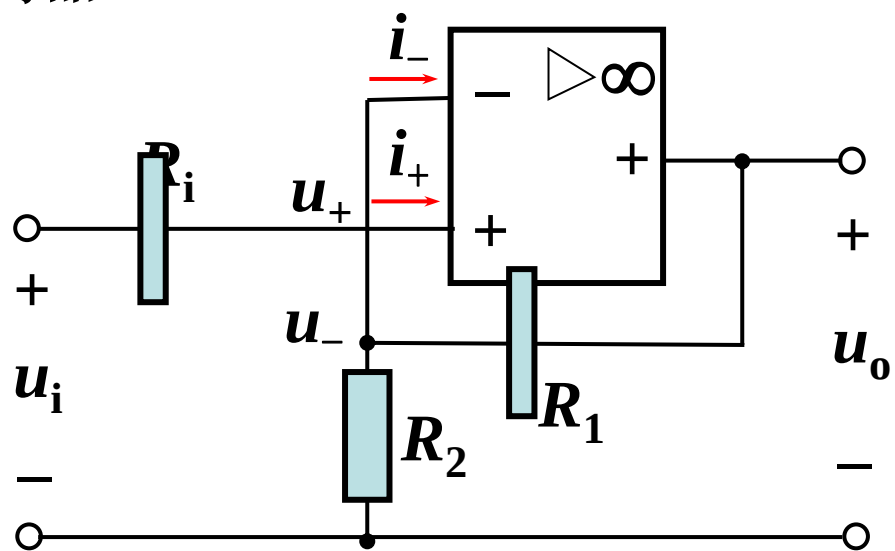
$$u_{i1}/R_1 + u_{i2}/R_2 + u_{i3}/R_3 = -u_o/R_f$$

$$\therefore u_o = -(R_f/R_1 u_{i1} + R_f/R_2 u_{i2} + R_f/R_3 u_{i3})$$

比例加法器： $y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$ ，符号如下图：



3. 正相比例器



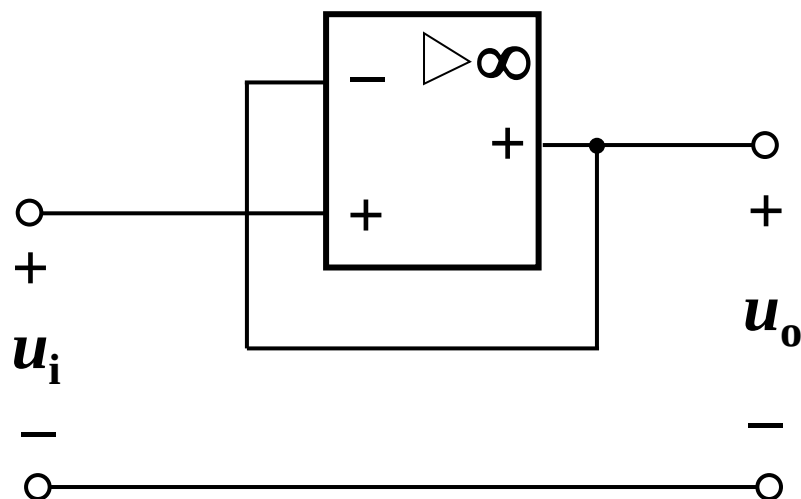
$$\begin{cases} u_+ = u_- = u_i \\ i_+ = i_- = 0 \end{cases}$$

$$(u_o - u_-)/R_1 = u_-/R_2$$

$$u_o = (R_1 + R_2)/R_2 u_i$$

$$= (1 + R_1/R_2) u_i$$

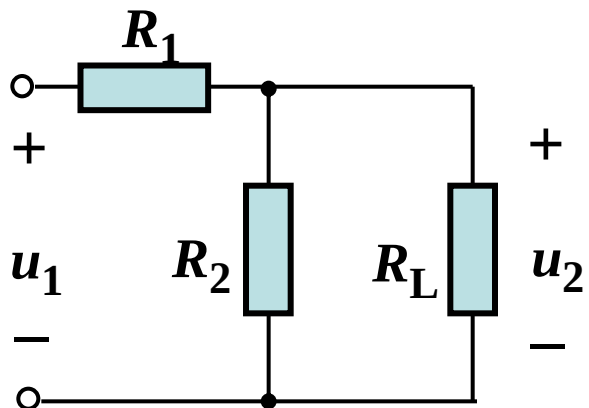
4. 电压跟随器



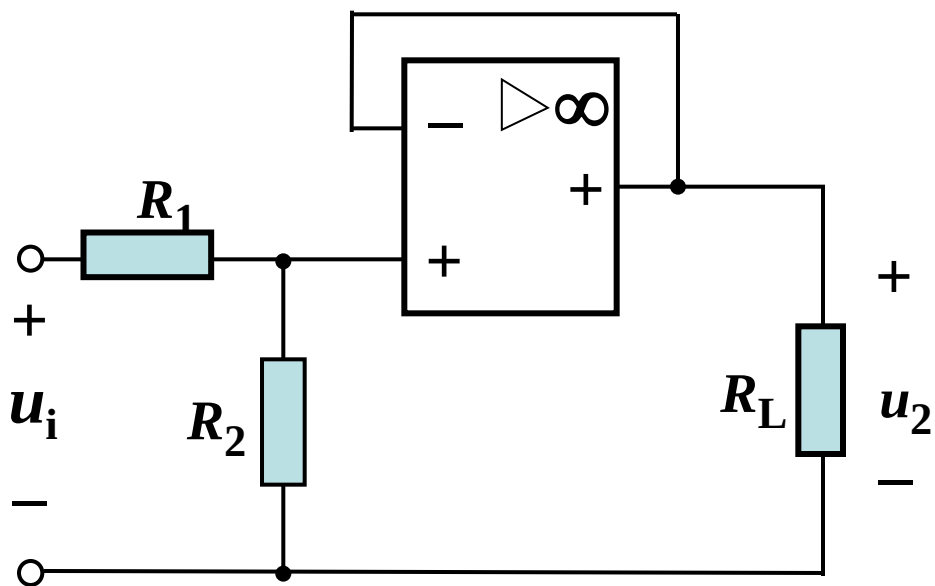
- 特点：
- ① 输入阻抗无穷大(虚断);
 - ② 输出阻抗为零;
 - ③ $u_o = u_i$ 。

应用：在电路中起隔离前后两级电路的作用。

例



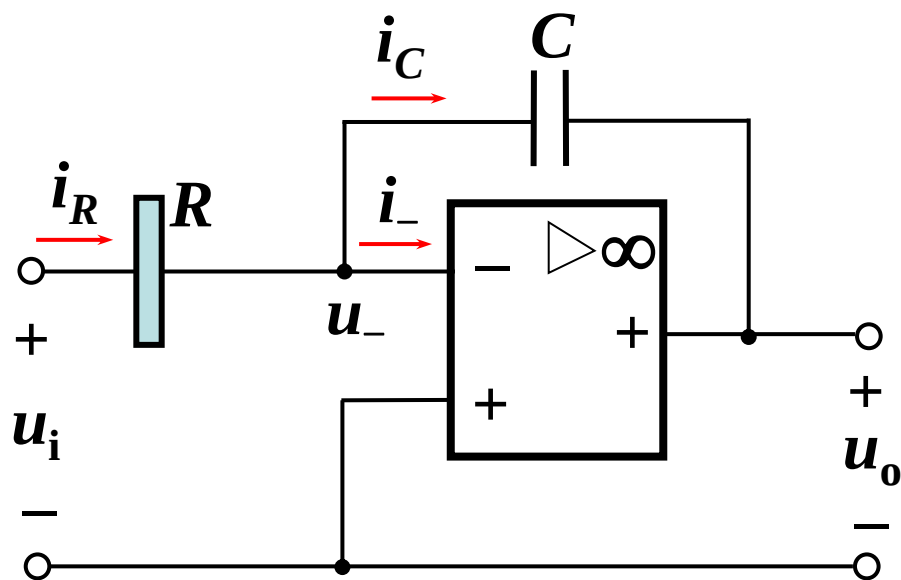
$$u_2 \neq \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_1$$



$$u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_1$$

可见，加入跟随器后，隔离了前后两级电路的相互影响。

5. 积分器



$$\begin{cases} u_- = 0 \\ i_- = 0 \end{cases}$$

$$i_R = i_C$$

$$\frac{u_i}{R} = -C \frac{du_o}{dt}$$

$$u_o = -\frac{1}{RC} \int u_i dt$$

积分环节 $y = \int x dt$

